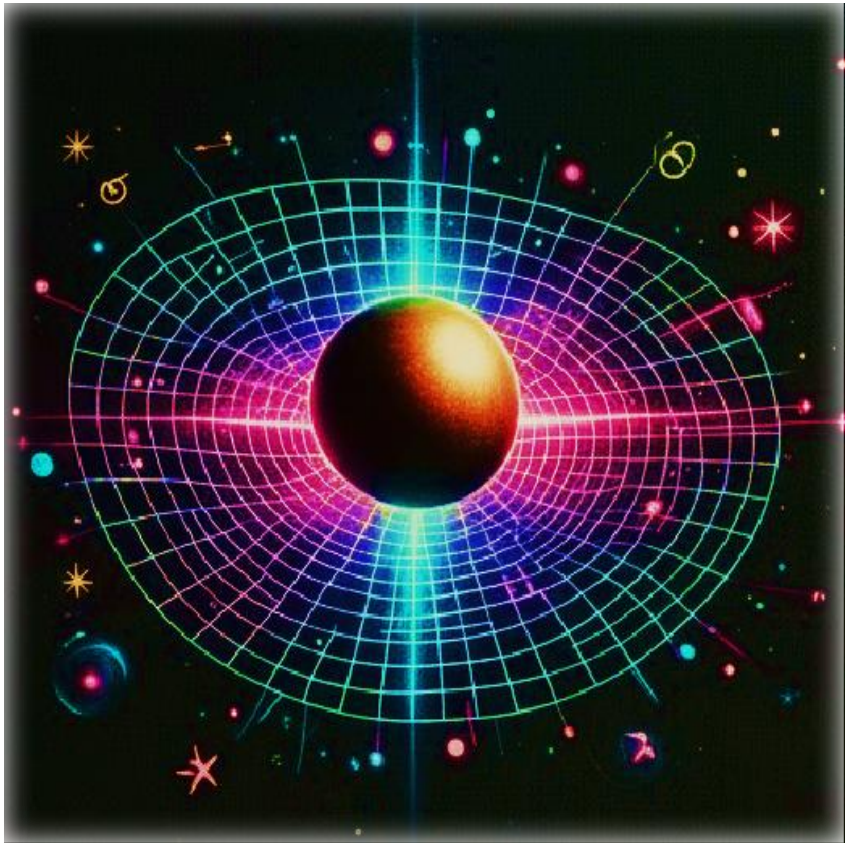
INTRODUCCIÓN A LA
RELATIVIDAD
ESPECIAL Y GENERAL



Alejandro Valderrama

INTRODUCCIÓN A LA

RELATIVIDAD

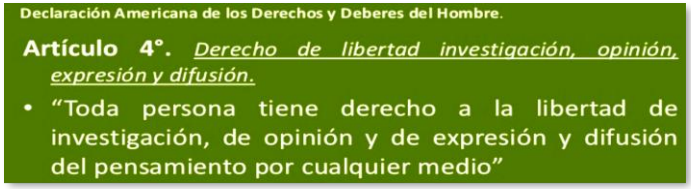
ESPECIAL Y GENERAL

Autor: A. Valderrama

© 2025 A. Valderrama. Todos los derechos reservados.

DESCARGO DE RESPONSABILIDAD

- Los temas desarrollados han sido elaborados de manera original por el Autor para la impartición de algunos cursos de Relatividad de la Facultad de Ciencias, UNAM.
- La información presentada ha sido tomada de múltiples fuentes, algunas referidas en la bibliografía del curso y otras de información disponible en la Internet de *dominio público*.
- Algunos párrafos pueden ser tomados textuales o traducidos, o algunas fotos reproducidas de manera directa o indirecta, en todos los casos se ha realizado un trabajo de recopilación, organización y edición original.
- En ningún momento el realizador pretende adjudicarse la autoría de ninguna de todas las partes componentes de este material didáctico; más, sin embargo, sí la autoría y propiedad de la composición como material didáctico terminado o en desarrollo.



Primera edición. Ciudad de México, 2025.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio sin la autorización expresa del autor. Cualquier cita o referencia deberá mencionar la fuente completa.

Nota del autor sobre el uso de inteligencia artificial:

Este libro fue desarrollado con el apoyo de herramientas de inteligencia artificial —incluyendo ChatGPT, Gemini y Copilot— empleadas como instrumentos de análisis conceptual, redacción técnica y exploración de modelos físicos. Todas las ideas, estructuras y resultados presentados fueron dirigidos, revisados y sintetizados por el autor, quien conserva plena autoría y responsabilidad intelectual sobre la obra.

Para contacto o correspondencia académica:

✉ [**alecvald@ciencias.unam.mx**]

ISBN: 9798275838930

Prólogo del Autor:

El presente libro nace de la necesidad de abordar la "Teoría de la Relatividad". Aunque se considera uno de los pilares de la Física moderna, junto con la Mecánica Cuántica, lo cierto es que en muchas aplicaciones basta usar aproximaciones clásicas, y quizá por ese motivo aunado a la complicación conceptual y matemática es que son materias estudiadas más por especialistas que por la comunidad de Ciencias Físico Matemáticas en general.

En un afán de hacer el lenguaje más claro y accesible en lo que respecta a la "Teoría de la Relatividad" de la que ya debiéramos referirnos como *Leyes de la Relatividad* (Especial y General) por la gran cantidad de pruebas que han verificado y asentado sus postulados y diversas predicciones y resultados; nos proponemos abordar los temas de la materia con un enfoque básico elemental, tratando de resaltar los resultados importantes construyéndolos con matemáticas, las más de las veces simples, en el caso de Relatividad Especial; y cuando no, como en el caso de Relatividad General, que versa en lenguaje del *Cálculo Tensorial* variante del Cálculo Diferencial e Integral, bastante engorrosa por el uso de gran cantidad de subíndices y superíndices, en expresiones referidas a matrices multidimensionales, nos damos a la tarea de construir las herramientas matemáticas necesarias, dando un tratamiento detallado a los aspectos más básicos y operativos de la materia del *Cálculo Tensorial*, contextualizada a la Relatividad.

La mayoría de los libros de Relatividad General hacen definiciones muy parcas y aplicaciones muy complejas del *Calculo Tensorial*, de manera que la Teoría Física se vuelve oscura y difícil de manejar. En este libro, no ocurre eso. Al contrario, desarrollamos el *Cálculo Tensorial*, en cuanto a sus fundamentos matemáticos de una manera detallada, sin dejar de ser simple y empatamos sus propiedades básicas con los resultados de la Relatividad, resultando en la construcción de una teoría simple, pero al mismo tiempo poderosa en cuanto a su capacidad demostrativa y predictiva.

Otro aspecto de este trabajo es que, desarrolla la Relatividad tratando de justificar matemáticamente los resultados más importantes y emblemáticos, haciendo un recorrido completo, más no exhaustivo, por los aspectos fundamentales, teóricos, conceptuales y matemáticos que engloban esta bella materia sobre el movimiento y el espacio tiempo.

Al final del libro, se añaden un conjunto básico de problemas ilustrativos con sus soluciones paso a paso, tanto de Relatividad Especial, Tensores y Relatividad General, para que quien se interese en ganar práctica, en la aplicación de la Relatividad a la resolución de problemas, adquiera las bases necesarias para ello.

Finalmente, deseo que el lector disfrute de este texto y de la belleza de la Relatividad que, si bien cobra un precio de complejidad matemática para su entendimiento, a cambio nos regala una nueva forma de entender al Universo.

"Cuando se nos otorga la enseñanza, es nuestro deber no darlo por sentado, sino utilizarlo como un método para mejorar a la humanidad"
EINSTEIN

ÍNDICE

I RELATIVIDAD ESPECIAL

1 Introducción 6

1.1 Sistemas Inerciales 7

1.2 Invariancia ante Traslaciones 9

1.3 Invariancia ante Rotaciones 10

1.4 Invariancia de las Traslaciones de Galileo 12

1.5 Invariancia de las leyes de Newton 13

2 Propagación de la luz 15

2.1 El Experimento de Michelson & Morley 15

2.2 Postulados de Einstein, Relatividad Especial 18

2.3 Visualizaciones en Relatividad Especial 22

2.4 Transformaciones de Lorentz 23

3 El Espacio de Minkowsky 27

3.1 Consecuencias de las Transformaciones de Lorentz 27

3.2 Cuadrivectores y Conos de Luz 28

4 La Mecánica de la Relatividad Especial 32

4.1 Cinemática Relativista 32

4.2 Consecuencias de las Transformaciones de Velocidad 33

4.3 Dinámica Relativista 37

4.4 Ecuaciones de Movimiento 41

5 Cálculo Tensorial 44

5.1 Convención de Einstein y Álgebra de Tensores 45

5.2 Sistemas Lineales y Transformación de Coordenadas 53

5.3 Tensores de $\boldsymbol{1er}$ Orden y Superior 57

5.4 Operaciones Tensoriales 64

5.5 El Tensor Métrico 67

5.6 Derivadas Tensoriales 74

6 Otros Resultados de la Relatividad Especial 83

6.1 Electrodinámica Relativista 83

6.2 Formulación covariante de las Ecuaciones de Maxwell 89

II RELATIVIDAD GENERAL

1 Espacio-Tiempo y Geometría 94

1.1 Introducción 94

1.2 El Principio de Equivalencia 95

1.3 Curvatura y el Tensor de Riemann 99

1.4 La Métrica 101

2 Las Ecuaciones de Einstein 104

2.1 Formulación Gravitacional Generalizada 104

2.2 Teoría de Campo Generalizada 109

3 La Solución de Schwarzschild 112

3.1 Métrica de Schwarzschild 112

3.2 El Perihelio de Mercurio 119

3.3 La Deflexión de la Luz 124

3.4 Hoyos Negros de Schwarzschild 128

3.5 Órbitas de fotones 132

ANEXOS

A1 LA LAGRANGIANA RELATIVISTA 136

1. El Problema Clásico vs. El Relativista 136

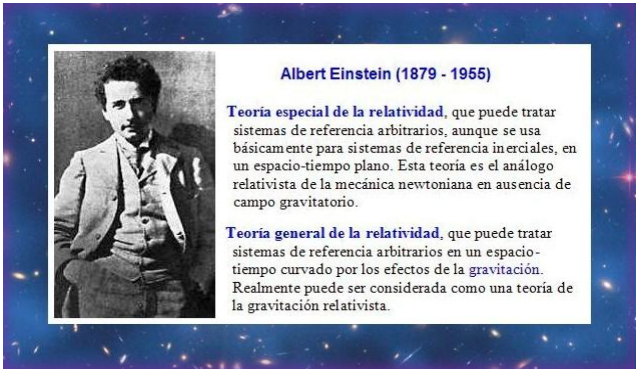
2. Relatividad Especial: La Partícula Libre 136

A2 PROBLEMAS ILUSTRATIVOS RESUELTOS 138

1. Relatividad Especial.- 138

2. Cálculo Tensorial.- 155

3. Relatividad General.- 166



I RELATIVIDAD ESPECIAL

¿Qué la luz no se puede estar quieta?
No: precisamente, no.
La luz, si existe, viaja; y sólo si viaja, existe.
Es cono las olas del mar.
¿Alguien ha visto una ola quieta en el mar?
Luis de la Peña

1 Introducción

La Relatividad surge como un gran esfuerzo para dotar a la mecánica de Newton y al electromagnetismo de Maxwell de un sistema matemático coherente en el que las leyes de la Física se pueden expresar de la misma forma sin importar el sistema de referencia en el que se encuentre el observador de un fenómeno en particular.

Sin embargo, los sistemas de ecuaciones que permiten transformar las ecuaciones de movimiento de un sistema de referencia a otro deben satisfacer un *Principio de Invariancia*:

La velocidad de la luz tiene el mismo valor en cualquier sistema de referencia sin importar su velocidad relativa respecto de otro sistema de referencia.

Las consecuencias de la relatividad impactaron la Física Clásica de manera definitiva justo cuando la Revolución Industrial enraizaba en el determinismo y el absolutismo; y por otro lado representaba el más precoz intento de ligar el campo electromagnético con el propio espacio-tiempo.

¡Han pasado ya más de 100 años del inicio de la revolución relativista y la física contemporánea aun titubea cuando se habla del espacio-tiempo y por otro lado se acepta con ingenua soltura las propiedades del Campo Electromagnético que por cierto es del orden de 10 a la 40 veces en intensidad mayor que el gravitacional y se debe a cargas diminutas!

Pues bien, el logro máximo de la Relatividad es dar al concepto de Espacio un valor como ente físico, ha dejado de ser el escenario "vacío" en donde la materia realiza su actuación.

Para la Relatividad el espacio-tiempo es tan fundamental como la materia y la energía; y puede transformarse mediante su propiedad de transformarse en materia o en energía y viceversa: Pues no solo cuando la materia colapsa puede generar un “hoyo negro” (del que ya hablaremos más) en el que ya no existe la "materia atómica"; también sucede que en un horizonte de acontecimientos se puede crear un par partícula - antipartícula.

De cualquier manera, ya en la actualidad la relatividad se presenta de diversas formas, desde las necesarias correcciones relativistas para las señales de telecomunicaciones hasta la percepción de objetos remotos en el fondo cósmico mediante el uso de Lentes Gravitacionales, ya sin considerar sus efectos magnéticos y la importancia de la Cinemática Relativista para el estudio de partículas en aceleradores gigantescos.

Así entonces la Relatividad junto con la Mecánica Cuántica constituyen los pilares de la Física Moderna y conviene para entenderlas mejor conocer cómo es que se han ido construyendo de teorías a leyes y cuáles han sido los resultados que les han permitido imponerse a cualquier otro sistema de conocimiento en la actualidad.

1.1 Sistemas Inerciales

La Relatividad Especial se hizo famosa durante el siglo XX y se puede deducir de dos postulados fundamentales:

I. **Principio de relatividad (Galileo):** Ningún experimento puede medir la velocidad absoluta de un observador. *Los resultados de cualquier experimento realizado por un observador no dependen de su velocidad respecto a otros observadores que no están involucrados en el experimento.*

II. **Universalidad de la velocidad de la luz (Einstein):** La velocidad de la luz relativa a cualquier observador no acelerado es $c = 3 \times 108\ ms^{-1}$, independientemente del movimiento de la fuente de luz respecto al observador. *Es decir, dos observadores no acelerados que miden la velocidad del mismo fotón lo encontrarán a la misma velocidad en relación con ellos mismos, independientemente de su estado de movimiento mutuo.*

Con ellos se revelaron desconcertantes propiedades relacionadas con la longitud de los objetos que se miden más cortos cuando se encuentran en movimiento a grandes velocidades cercanas a la de la luz, así como el descubrimiento de que el correr del tiempo no es absoluto y puede depender del estado de movimiento de los observadores.

Estos descubrimientos se realizaron con el estudio teórico y experimental de la propagación de la luz para observadores en movimiento.

Y más técnicamente, resultan ser consecuencias de la invariancia de las propiedades de las ecuaciones de Maxwell.

Para tener una aproximación simple a las propiedades de invariancia, es conveniente estudiarlas primero en el contexto de la Mecánica Clásica. Aquí aparecen naturalmente al introducir el concepto de Sistema Inercial.

Sistema Inercial: sistema de coordenadas de espacio y tiempo, que permite registrar una posición definida *(x, y, z)* y el tiempo *t* de cualquier evento.

Este sistema de coordenadas debe cumplir que:

1. La distancia entre el punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y el punto $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ sea independiente del tiempo.
2. Los valores del tiempo (relojes) en cada punto del espacio estén sincronizados con la coordenada de tiempo *t* y todos funcionen a la misma velocidad.
3. La geometría del espacio en cualquier tiempo *t* se considere euclidiana e invariante. Es decir, que los campos gravitacionales alrededor un conjunto de puntos con distancias fijas sean tan débiles que no requieran considerarse en los cálculos por no ser observables.

Figura 1.1.1: GPS.

Así entonces, podemos definir un *sistema inercial:* es un sistema de coordenadas en el cual las ecuaciones de movimiento toman su forma usual:

$$m\ddot{x}^{\alpha} = F^{\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \qquad \textbf{[1.1.1]}$$

En coordenadas cartesianas: $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, con $\ddot{x}^{\alpha} = d^2x^{\alpha}/dt^2$.

Experimentalmente un sistema inercial puede entenderse como una buena aproximación de un sistema coordenado para el cual las estrellas se encuentran fijas o en reposo.

Los sistemas inerciales no quedan definidos de manera única; así que, si S es un sistema inercial, entonces todos los sistemas S' generados a partir de S realizando una traslación espacial, una rotación en un ángulo constante (independiente del tiempo), un corrimiento del origen temporal o un movimiento con velocidad constante, serán nuevamente sistemas inerciales.

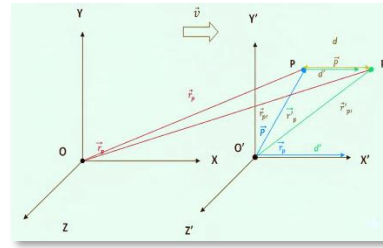


Figura 1.1.2: Sistemas de referencia S y S' inerciales.

Los sistemas coordenados que se encuentren acelerados o que tengan una rotación continua no son sistemas inerciales.

1.2 Invariancia ante Traslaciones

Los resultados experimentales no deben depender de la elección del origen del sistema de coordenadas cartesiano que se esté usando (homogeneidad del espacio).

Así que, para un sistema con masas m_N, las ecuaciones de movimiento se pueden escribir como:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_N = \boldsymbol{F}_N \qquad \textbf{[1.2.1]}$$

Y esta ecuación debe ser invariante bajo traslaciones por un vector constante $\boldsymbol{b}$; es decir, mediante la sustitución:

$$\boldsymbol{r'}_N = \boldsymbol{r}_N + \boldsymbol{b}, \quad \dot{\boldsymbol{r}}'_N = \dot{\boldsymbol{r}}_N, \quad \boldsymbol{F'}_N = \boldsymbol{F}_N \qquad \textbf{[1.2.2]}$$

Sustituyendo **[1.2.2]** en **[1.1.1]** se muestra la invariancia de manera trivial.

Pero si ahora complicamos la ecuación **[1.2.1]** para que la fuerza dependa de las velocidades y las posiciones de todas las masas, entonces podemos escribir:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_N = \boldsymbol{F}_N(\boldsymbol{r}_M, \dot{\boldsymbol{r}}_M, t) \qquad \textbf{[1.2.3]}$$

Entonces la sustitución por $\boldsymbol{r'}_N = \boldsymbol{r}_N + \boldsymbol{b}$ transforma la ecuación en:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}'_N = \boldsymbol{F}_N\left(\boldsymbol{r'}_M - \boldsymbol{b}, \dot{\boldsymbol{r}}'_M, t\right) \qquad \textbf{[1.2.4]}$$

Esta ecuación tendrá la forma **[1.2.3]** solamente si la fuerza aplicada a la masa no depende de las posiciones $\boldsymbol{r}_M$ de las otras masas y únicamente depende de las distancias $\boldsymbol{r}_N - \boldsymbol{r}_M$, porque así se tiene:

$$\boldsymbol{F}_N = \boldsymbol{F}_N(\boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_M, \dot{\boldsymbol{r}}_M, t) \longrightarrow \boldsymbol{F'}_N = \boldsymbol{F}_N\left(\boldsymbol{r'}_M - \boldsymbol{r'}_M, \dot{\boldsymbol{r}}'_M, t\right)$$

Y el vector constante $\boldsymbol{b}$ queda eliminado.

Los sistemas cerrados para los cuales la fuente de todas las fuerzas son parte del sistema, usualmente tienen esta propiedad.

Ejemplos de ecuaciones de movimiento que son invariantes ante traslaciones son aquellos en los que se cumple que $m\ddot{\boldsymbol{r}} = g$ como en el caso del movimiento en un campo gravitacional uniforme y el movimiento de un planeta en la posición $\boldsymbol{r}$ en el campo gravitatorio del Sol en la posición $\boldsymbol{r}_S$.

Así para estos casos se puede escribir:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = f\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_S}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_S|^3} \qquad \textbf{[1.2.5]}$$

En una forma similar, los resultados experimentales no deben depender de la elección del origen del tiempo (homogeneidad temporal) y las ecuaciones de movimiento deberán ser invariantes bajo la traslación temporal:

$$t' = t + b \qquad \textbf{[1.2.6]}$$

Una inspección de la ecuación **[1.2.1]** permite asegurar que la invariancia solo se garantiza si las fuerzas no dependen explícitamente del tiempo (siendo dependientes del tiempo solo en función del movimiento de las fuentes) lo cual nuevamente es válido cuando no existen fuerzas externas al sistema en estudio.

Encontrar las transformaciones que permitan que las ecuaciones de movimiento se mantengan inalteradas en todos los SRI sin duda es una cuestión de elegancia matemática y de practicidad física. Es muchos casos es posible, aunque siempre hay que pagar un precio.

Por lo tanto, podemos establecer que: para sistemas cerrados, las leyes de la naturaleza no permiten una verificación experimental de una posición absoluta en el espacio.

1.3 Invariancia ante Rotaciones

Una rotación simple, como puede ser una rotación alrededor del eje z puede escribirse como:

$$x' = x\,cos\,\varphi + y\,sen\,\varphi, \quad y' = -x\,sen\,\varphi + y\,cos\,\varphi, \quad z' = z \qquad \textbf{[1.3.1]}$$

Que también se puede escribir usando matrices con la notación para las coordenadas cartesianas:

$$x_1 = x^1 = x, \qquad x_2 = x^2 = y, \qquad x_3 = x^3 = z \qquad \textbf{[1.3.2]}$$

Notación apropiada para el uso de vectores y tensores tanto en la Relatividad Especial como en la General, según se irá viendo a medida que se desarrolle el tratamiento de estas.

NOTA: También como es usual en relatividad, se usará la Convención de Suma de Einstein: *suma sobre dos índices repetidos, teniendo uno como subíndice y el otro como superíndice.*

Una rotación general (como una transformación ortogonal) es una transformación lineal que puede escribirse en dos formas equivalentes:

$$x^{\alpha'} = D^{\alpha'}_{\beta} x^{\beta}, \qquad x_{\alpha'} = D^{\beta}_{\alpha'} x_{\beta} \qquad \textbf{[1.3.3]}$$

Las rotaciones dejan fijas las distancias y los ángulos, de modo que para dos vectores arbitrarios x^α y ξ^α su producto escalar permanecerá sin cambios luego de una rotación, de modo que teniendo:

$$x_{\alpha'} = D^{\beta}_{\alpha'} x_\beta, \qquad \xi^{\alpha'} = D^{\alpha'}_{\gamma} \xi^\gamma \tag{1.3.4}$$

Se tendrá:

$$x_{\alpha'} \xi^{\alpha'} = D^{\beta}_{\alpha'} D^{\alpha'}_{\gamma} x_\beta \xi^\gamma = x_\beta \xi^\beta \tag{1.3.5}$$

Para vectores arbitrarios $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{\xi}$ esto es cierto solo si:

$$D^{\beta}_{\alpha'} D^{\alpha'}_{\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma}, \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3. \tag{1.3.6}$$

La ecuación **[1.3.6]** caracteriza en general a la transformación ortogonal.

Tomando los determinantes de ambos lados de esta (nótese que $D^{\beta}_{\alpha'}$ y $D^{\alpha'}_{\gamma}$ son numéricamente iguales) se obtiene:

$$\left\| D^{\beta}_{\alpha'} \right\|^2 = 1. \tag{1.3.7}$$

Una transformación de esta forma es una rotación como **[1.3.1]** con:

$$x^{\alpha'} = D^{\alpha'}_{\beta} x^\beta = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,\varphi & sen\,\varphi & 0 \\ -sen\,\varphi & cos\,\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.3.8}$$

Las transformaciones con $\left\| D^{\beta}_{\alpha'} \right\|^2 = -1$ contienen reflexiones, como por ejemplo la inversión:

$$\begin{matrix} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad D^{\beta}_{\alpha'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.3.9}$$

Para aplicar una rotación a las ecuaciones de movimiento primero obsérvese que para las rotaciones independientes del tiempo se tiene que:

$$x^{\alpha'} = D^{\alpha'}_{\beta} x^\beta \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{x}^{\alpha'} = D^{\alpha'}_{\beta} \ddot{x}^\beta \tag{1.3.10}$$

Entonces, la fuerza como vector $\boldsymbol{F}$ tendrá componentes F^α que se transforman de la misma manera que las componentes del vector posición x^α. Si ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación **[1.1.1]** por $D^{\alpha'}_{\beta}$ se tiene:

$$D^{\alpha'}_{\beta} m \ddot{x}^\beta = m \ddot{x}^{\alpha'} = D^{\alpha'}_{\beta} F^\beta = F^{\alpha'} \tag{1.3.11}$$

Así que la forma de la ecuación se mantiene sin cambios.

Pero si adicionalmente se toman en cuenta los argumentos de las componentes de la fuerza:

$$m\ddot{x}^{\alpha'} = D_{\beta}^{\alpha'} F^{\alpha}\left(x^{\beta}, \dot{x}^{\beta}, t\right) = F^{\alpha'}\left(x^{\beta}, \dot{x}^{\beta}, t\right) \qquad \textbf{[1.3.12]}$$

Vemos que $F^{\alpha'}$ puede depender de variables equivocadas. Esto no ocurre si F^{α} depende solo de invariantes, lo cual ocurre en la práctica en la mayoría de los casos.

Un ejemplo de ecuación invariante esta dado en la ecuación **[1.2.5]**: la diferencia $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_S$ es un vector y la distancia $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_S|$ es rotacionalmente invariante.

Podemos establecer entonces que:

La fuerza es un vector, y para los sistemas cerrados, las componentes de la fuerza dependen solo de invariantes, la ecuación de movimiento es rotacionalmente invariante y no permite la definición de una dirección absoluta en el espacio.

1.4 Invariancia de las Traslaciones de Galileo

Ahora consideramos dos sistemas que se están moviendo con velocidad constante $\boldsymbol{v}$ uno respecto del otro (*Transformación de Galileo*):

$$\boldsymbol{r'}_N = \boldsymbol{r}_N - \boldsymbol{v}t, \qquad t' = t \qquad \textbf{[1.4.1]}$$

Debido a que: $\dot{\boldsymbol{r}}'_N = \dot{\boldsymbol{r}}_N - \boldsymbol{v}$ y $\ddot{\boldsymbol{r}}'_N = \ddot{\boldsymbol{r}}_N$, la ecuación de movimiento se transforma en:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}'_N = m\ddot{\boldsymbol{r}}_N = \boldsymbol{F}_N\left(\boldsymbol{r}'_M + \boldsymbol{v}t, \dot{\boldsymbol{r}}'_M + \boldsymbol{v}, t\right) \qquad \textbf{[1.4.2]}$$

Aunque la constante $\boldsymbol{v}$ se elimina cuando se calcula la aceleración los argumentos de la fuerza seguirán dependiendo de $\boldsymbol{v}$. De modo que la ecuación solo podrá ser invariante cuando la fuerza dependa de las posiciones $\boldsymbol{r}_N - \boldsymbol{r}_M$ y las velocidades $\dot{\boldsymbol{r}}_M - \dot{\boldsymbol{r}}_N$ relativas. Este es usualmente el caso de los sistemas cerrados y de las ecuaciones escritas apropiadamente.

Considérese como ejemplo el caso del movimiento en un campo gravitacional constante $\boldsymbol{g}$ bajo la influencia de la fricción en el aire,

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -a\dot{\boldsymbol{r}} - m\boldsymbol{g} \qquad \textbf{[1.4.3]}$$

A primera vista, por el término $\dot{\boldsymbol{r}}$, parece un contraejemplo. Pero este término es causa de la fricción, y corresponde a la velocidad relativa con respecto al aire, de modo que esta ecuación debe escribirse correctamente como:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -a(\dot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{v}_{aire}) - m\boldsymbol{g} \qquad \textbf{[1.4.4]}$$

Y la invariancia ahora es obvia.

Para sistemas cerrados, las ecuaciones de movimiento son invariantes bajo las transformaciones de Galileo; y no puede definirse una velocidad absoluta.

Así pues, tenemos el **Principio de Galileo**: *solo se pueden definir y medir movimientos relativos*.

* Según lo anterior, quedan dos puntos de reflexión:

1. ¿Hasta dónde se puede considerar un sistema cerrado? y
2. ¿Por qué las aceleraciones si son absolutas?

Ejemplo: estando en un tren que corre en un tramo donde la pista se encuentra perfectamente lisa, observamos que la superficie de los líquidos, cuando el tren se mueve a velocidad constante, permanece al mismo nivel, sin dar ninguna información sobre cuál es nuestra velocidad.

En cambio, si el tren cambia su velocidad, entonces el nivel la superficie de los líquidos se inclina, y podemos decir al mirarlos que tan grande y en qué dirección es la aceleración.

Figura 1.4.1: Tren rápido.

1.5 Invariancia de las leyes de Newton

La invariancia galileana derivada del principio de relatividad según el cual las leyes fundamentales de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales permite afirmar que, ante el cambio de sistemas de referencia inicial, los observadores correspondientes medirán las mismas aceleraciones, por lo que las ecuaciones de movimiento para describir los hechos físicos aplicarán de igual forma en todos los sistemas de referencia que sean inerciales.

Por lo tanto, la segunda ley de Newton será válida según las mediciones de diferentes observadores inerciales.

Y además se podrá añadir a la ley de transformación galileana la afirmación de que $\boldsymbol{F}$ y m son invariantes, es decir las mismas independientemente de cuál de los observadores inerciales las mida.

Así también, la tercera ley de Newton, referida a que la fuerza ejercida por un cuerpo sobre otro es igual y opuesta a la que ejerce la segunda sobre la primera, claramente no se ve afectada por el cambio de observadores; de nuevo porque suponemos que las fuerzas y las masas son invariantes.

Es decir, las leyes de Newton se mantienen en todos los sistemas inerciales. En este contexto, a veces esto es llamado la *relatividad newtoniana*.

Lo anterior también puede expresarse mediante los siguientes axiomas de la **Teoría de Newton**:

1. Existe un *Espacio Absoluto*, en el que las leyes de Newton son ciertas. Un sistema de referencia inercial es un marco de referencia en movimiento uniforme en relación con el *Espacio Absoluto*.
2. Todos los sistemas inerciales comparten un *Tiempo Universal*.

Figura 1.4.1: Un sistema de referencia inercial es un sistema de coordenadas que se traslada a velocidad constante respecto de otro. En muchas ocasiones sistemas como la Tierra que nos son propiamente inerciales, pueden considerarse así por un periodo de tiempo corto…

2 Propagación de la luz

2.1 El Experimento de Michelson & Morley

El experimento de Michelson y Morley fue uno de los más importantes y famosos de la historia de la física. Realizado en 1887 por Albert Abraham Michelson (Premio Nobel de Física, 1907) y Edward Morley, es considerado como una prueba contra la teoría del éter (medio de propagación de la luz). El resultado negativo del experimento constituiría posteriormente la base experimental de la teoría de la Relatividad Especial de Einstein.

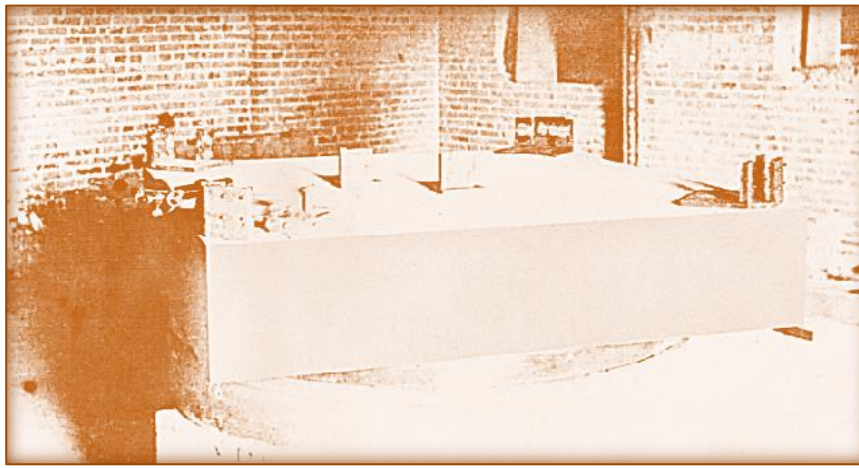


Figura 2.1.1: Interferómetro de Michelson (1887).

En el experimento, Michelson y Morley pudieron obtener una longitud de trayectoria óptica $2L = 22\,m$, ya que la longitud de cada brazo del interferómetro fue de $L \approx 11\,m$.

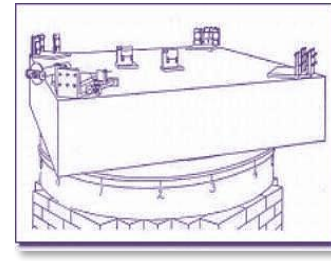


Figura 2.1.2: Interferómetro de Michelson

Si la diferencia de trayectoria óptica varía en una distancia igual o similar a la longitud de onda, entonces, una raya o franja habrá de trasladarse a través del retículo de la mirilla de observador.

Si se varía la longitud de algunos de los caminos ópticos del interferómetro (la longitud de uno de los brazos del instrumento), las franjas de interferencia se mueven a través de la pantalla a medida que en cada punto las ondas se refuerzan y anulan sucesivamente.

Por ello, el aparato estacionario no puede decir nada referente a diferencias de tiempo en el recorrido de los dos caminos (los brazos del interferómetro).

Sin embargo, si se gira el aparato 90º, los dos caminos cambian su orientación con respecto a la hipotética *corriente de éter*, de tal manera que el rayo que antes necesitaba un tiempo t_1 para el recorrido total, requiere ahora un tiempo t_2 y viceversa. Si estos tiempos son diferentes, las franjas se moverán a través de la pantalla durante el giro.

La luz viaja con velocidad $c \approx 3 \times 10^8\ m/s$, para el recorrido de ida y vuelta al espejo M_1 desplazándose en una trayectoria paralela a la velocidad v del éter (al menos la velocidad de rotación de la Tierra $v = 3 \times 10^4\ m/s$) el tiempo de recorrido es:

$$t_1 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2L}{c(1-v^2/c^2)}$$

La trayectoria perpendicular a la dirección del éter hacia el espejo M_2 permite escribir:

$$c^2 = v^2 + V^2;$$

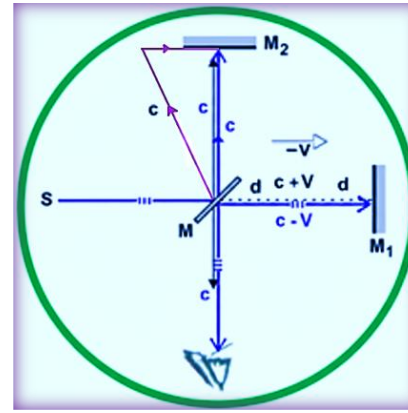


Figura 2.1.3: Diferencia de caminos ópticos.

es decir,

$$V = \sqrt{c^2 - v^2} = c\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

De modo que el tiempo de recorrido, ida y vuelta al espejo M_2, es:

$$t_2 = 2L/c\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Como la razón $v^2/c^2 = 10^{-8} \ll 1$, se puede usar el *Teorema del Binomio*: $(1 \pm x)^n = 1 \pm nx$ para expresar la diferencia en los tiempos de recorrido óptico, así que:

$$\Delta t = \frac{2L}{c}\left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = \frac{L}{c}\frac{v^2}{c^2} \qquad \textbf{[2.1.1]}$$

La diferencia de trayectorias correspondiente a la diferencia de tiempo es:

$$d = c\Delta t = \Delta N \lambda$$

Así se tiene que:

$$\Delta N = (L/\lambda)(v^2/c^2)$$

Para $L = 11\ m$ y $\lambda = 500\ nm$ se obtiene: $\Delta N \approx 0.2$ franjas.

Como el desplazamiento de franjas de interferencia se verifica en ambos recorridos, al rotar el interferómetro 90°, se tiene que:

$$\Delta N \approx 0.4 \text{ franjas.}$$

Un desplazamiento de esta magnitud es fácilmente observable, pero no se detectó absolutamente ningún desplazamiento de franjas de interferencia.

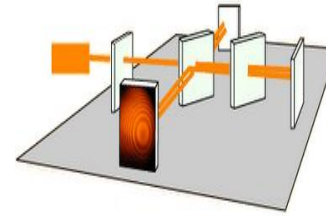


Figura 2.1.4: Patrón de interferencia.

Los resultados del experimento se interpretaron de tal forma que se concluyó:

- El éter carecía de propiedades medibles resultando, como consecuencia directa de aquello, el que la hipótesis del éter era insostenible.
- Se vislumbraba el nacimiento de nuevos principios para física: la contracción de la longitud; la dilatación del tiempo; y una constante universal.

En sí el resultado del experimento no viola el principio de relatividad de Galileo; de hecho, confirma que el éter no sirve para medir una velocidad absoluta.

Pero desde luego, algo está mal con la transformación de la ley de velocidades: la luz moviéndose con velocidad c en el sistema del éter tendría velocidad $c + v$ en el sistema de referencia de la Tierra.

Esta contradicción puede ilustrarse geométricamente como sigue: considérese dos observadores en sistemas de referencia inerciales Σ con coordenadas (x, y, z, t) y Σ' con $(x' = x - vt, y' = y, z' = z, t' = t)$, moviéndose con velocidad constante $\boldsymbol{v}$ uno con respecto del otro.

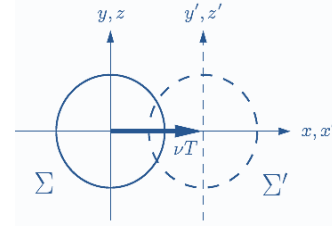


Figura 2.1.5: Propagación de la luz vista por dos observadores en movimiento relativo; $t = t' = T$.

En $t = 0$, cuando los sistemas coinciden, una señal es emitida desde el origen.

Dado que para ambos sistemas la velocidad de la luz es c, después de un tiempo T la señal luminosa ha alcanzado la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = c^2T^2$ para el sistema Σ, y la esfera $(x - vT)^2 + y^2 + z^2 = c^2T^2$ para el sistema Σ'. ¡Pero el frente de luz no puede estar simultáneamente en dos esferas!

Después de todo parece impensable que exista un medio tan tenue como para no ser detectado, pero tan rígido como para transportar una perturbación con tan alto coeficiente de restitución. Que no tenga fricción en sí mismo pero que sea arrastrado por los movimientos planetarios...

"Es curioso que el inexistente éter se parezca tanto al espacio-tiempo."

¿Ocaso el experimento no se llevó a cabo con la precisión necesaria, o quizá no se interpretó correctamente el resultado, o simplemente el dispositivo utilizado no tenía la capacidad de obtener los resultados deseados?

2.2 Postulados de Einstein, Relatividad Especial

Cinemática Relativista: Con la desaparición del éter, deja de existir un medio que llena el vacío y en el cual debiera ocurrir la vibración de las ondas luminosas. Sin embargo, se acepta que en el Campo Electromagnético se transportan tales ondas.

Las consecuencias que se obtienen de considerar que la velocidad de la luz es la misma para todos los Sistemas de Referencia Inerciales (SRI) se hacen evidentes con la aplicación de las *Transformaciones de Lorentz*.

En realidad, NO debiera extrañarnos que la luz como onda electromagnética solo tenga una velocidad posible.

Entiéndase también que c es un *límite*, sabemos que la luz varía su velocidad (índice de refracción) dependiendo de las cargas eléctricas que encuentre a su paso (medios con diferentes permitividades eléctricas y magnéticas), experimentando reflexión, absorción, transmisión...

Primer Postulado: No existe un sistema de referencia absoluto. Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales (que se mueven con velocidad constante).

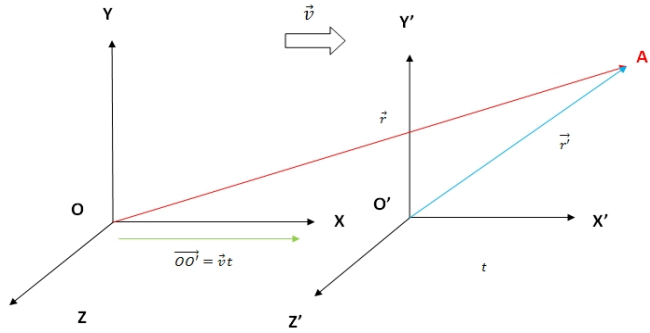


Figura 2.2.1: Sistemas de referencia S y S' inerciales.

Segundo Postulado: La velocidad de la luz en él vacío es una constante universal para los observadores en sistemas inerciales y es independiente del movimiento de la fuente emisora: $c \cong 3 \times 10^8\ m/s$.

"La luz viaja con una velocidad de 300 millones de metros cada segundo. ¿Por qué la luz viaja en el vacío a esta velocidad y no a otra? Es uno de tantos misterios de la física contemporánea.

Figura 2.2.2: La velocidad de la luz *c* es un límite teórico.

Transformaciones de Lorentz: Supóngase ahora una transformación de coordenadas:

$$x' = \gamma(x - vt) \Leftrightarrow x = \gamma(x' + vt') \qquad [2.2.1]$$

Sustituyendo el valor de x′ de la primera ecuación en la segunda se tiene:

$$x = \gamma^2(x - vt) + \gamma v t',$$

De donde:

$$t' = \gamma t + \left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma v}\right)x \qquad [2.2.2]$$

Ahora bien, por el segundo postulado: $x = ct$ y $x' = ct'$. Sustituyendo x' y t' de esta última ecuación con ayuda de la ecuación [2.2.1] y de la ecuación [2.2.2] se obtiene:

$$\gamma(x - vt) = c\gamma t + \left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma v}\right)cx \qquad [2.2.3]$$

que al despejar x se torna en:

$$x = \frac{c\gamma t + v\gamma t}{\gamma - \left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma v}\right)c} = ct\left[\frac{\gamma + \frac{v}{c}\gamma}{\gamma - \left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma v}\right)c}\right] = ct\left[\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right)\frac{c}{v}}\right] \qquad [2.2.4]$$

Pero esta última expresión debe ser igual a $x = ct$, siempre y cuando la cantidad entre paréntesis valga 1. De este paréntesis al igualarlo con 1 y despejar γ se obtiene el conocido *factor de Lorentz*:

$$\gamma = [1 - v^2/c^2]^{-1/2} \geq 1 \qquad \textbf{[2.2.5]}$$

Al usar este resultado en las ecuaciones **[2.2.1]** y **[2.2.2]** se obtienen las conocidas transformaciones de Lorentz:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \textbf{[2.2.6]}$$

Como consecuencia de las transformaciones de Lorentz se tienen los siguientes resultados:

Dilatación del tiempo: Considérese un reloj luminoso de pulsos.

Para un observador que se encuentra en reposo respecto del reloj, el tiempo "propio" en que la señal luminosa recorre la distancia L_0 de ida y vuelta es $t_0 = 2L_0/c$.

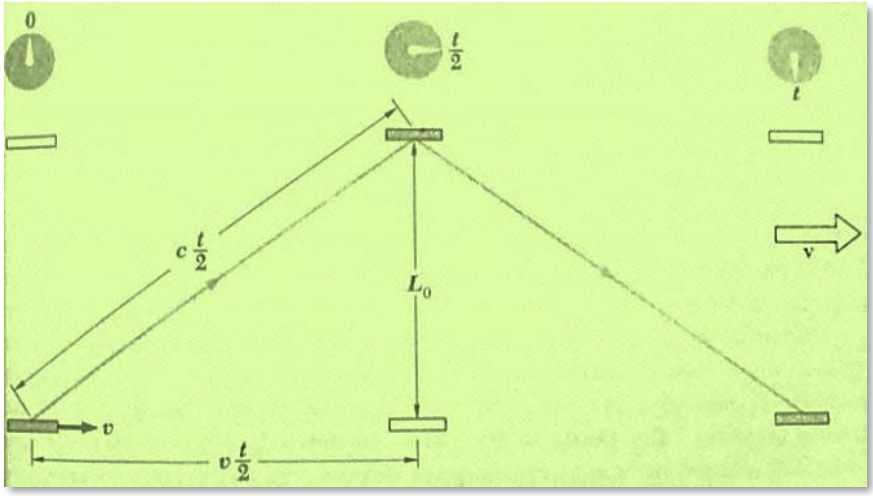


Figura 2.2.3: Reloj luminoso: $\vec{v} \perp L_0$.

Para un observador que se mueve a una velocidad v perpendicular, la señal luminosa recorrerá una distancia total ct; donde, $(ct/2)^2 = L_0^2 + (vt/2)^2$.

De modo que: $\frac{t^2}{2}(c^2 - v^2) = L_0^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

$$\therefore\ t = t_0\gamma \qquad \textbf{[2.2.7]}$$

Contracción de la longitud: Se considera nuevamente el reloj luminoso de pulsos, pero esta vez con velocidad horizontal:

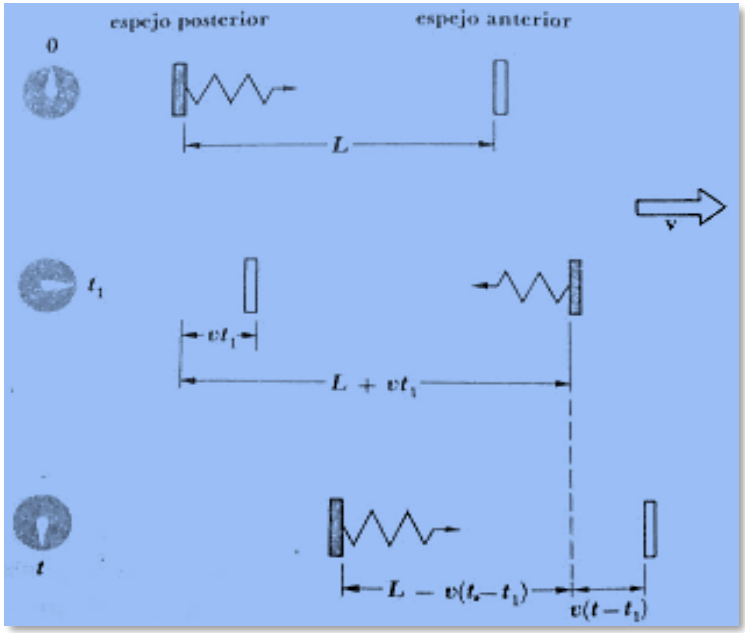


Figura 2.2.4: Reloj luminoso: $\bar{v} \,||\, L_0$.

De nuevo para el observador que está en reposo respecto del reloj el tiempo "propio" de recorrido, ida y vuelta de la señal es $t_0 = 2L_0/c$.

Para un observador con velocidad v paralela a la señal luminosa, la distancia recorrida de ida será: $ct_1 = L + vt_1$, es decir que: $t_1 = L/(c - v)$.

La distancia de vuelta será: $c(t - t_1) = L - v(t - t_1)$;

de donde: $t - t_1 = L/(c + v)$.

Sustituyendo t_1 se obtiene:

$$t = \frac{L}{(c+v)} + \frac{L}{(c-v)} = \frac{2Lc}{(c+v)(c-v)}$$

de modo que:

$$t = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2} = \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

al igualar con la expresión **[2.2.7]** para t, se tiene entonces:

$$\therefore \; L = L_0/\gamma \qquad \textbf{[2.2.8]}$$

2.3 Visualizaciones en Relatividad Especial

Visualización de objetos en movimiento: Debido a la contracción de la longitud de Lorentz, si un cuerpo se aleja con una velocidad grande se verá más largo, y si se acerca se verá más corto; esto debido al viaje de la luz desde sus extremos. Sin embargo, otros objetos se verán deformados al alejarse o acercarse con velocidades grandes o próximas a la de la luz:

- Una esfera se verá como un elipsoide con eje contraído o expandido en la dirección del movimiento del sistema de referencia.
- Una barra inclinada se verá con una inclinación diferente.
- Un cubo se verá deformado.

$v = 0.01c$ $v = 0.50c$ $v = 0.90c$ $v = 0.99c$

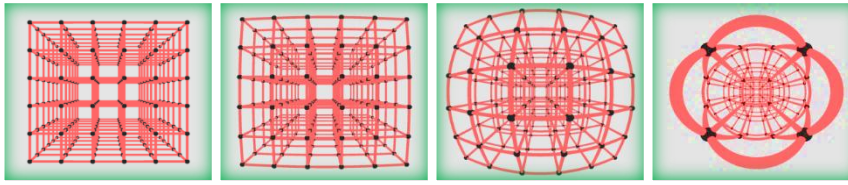


Figura 2.3.1: Vuelo Relativista a través de una malla 3D.

$v = 0.01c$ $v = 0.50c$ $v = 0.90c$ $v = 0.99c$

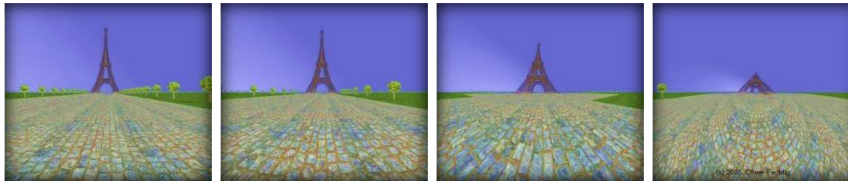


Figura 2.3.2: Vuelo Relativista por la Torre Eiffel.

$v \ll c$ $v = 0.95c$

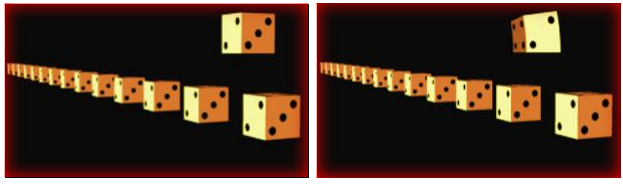


Figura 2.3.3: Dado en Movimiento Relativista.

$v = 0.01c$ $v = 0.95c$ $v = 0.99c$

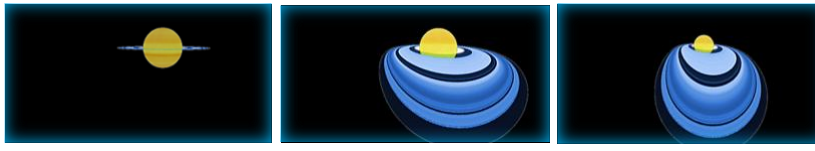


Figura 2.3.4: Vuelo relativista pasando Saturno.

2.4 Transformaciones de Lorentz

Covariancia de las leyes de la física: Las transformaciones de Lorentz se pueden presentar en forma: algebraica, matricial, geométrica y tensorial.

En todos los casos su cometido es uno: permitir la transformación de coordenadas de un Sistema de Referencia Inercial (SRI), S: (x, y, z, ct) a otro S': (x', y', z', ct').

La dificultad estriba en que para cada par de SRI's se tienen dos conjuntos de ecuaciones espejo: $S \to S'$ y $S' \to S$; lo cual solo cambia el signo de la velocidad relativa entre ambos sistemas.

Así resulta importante determinar primero cual será el sistema propio (con valores sin transformar) antes de aplicar las transformaciones a otro sistema el cual experimentará los fenómenos de Contracción de la Longitud y Dilatación del Tiempo en las ecuaciones de movimiento con valores relativistas.

Un frente de onda de luz emitido en $t_0 = 0$ en el origen de un sistema de referencia inercial se propaga en la superficie de la esfera tridimensional al tiempo t según la ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \qquad \textbf{[2.4.1]}$$

Las coordenadas de espacio y tiempo entran en esta ecuación de una forma simétrica. De modo que podemos adaptar nuestras coordenadas para considerar al tiempo como una cuarta coordenada: $x^4 = ct$. De manera más exacta, usamos:

$$x^a = (x, y, z, ct), \quad x_a = (x, y, z, -ct), \quad a = 1, \ldots, 4. \qquad \textbf{[2.4.2]}$$

Los dos tipos de coordenadas quedan relacionados por una matriz η (*eta*), que puede ser usada para elevar y bajar los índices, o pasar de una a otra:

$$\begin{matrix} x_a = \eta_{ab} x^b \\ x^a = \eta^{ab} x_b \end{matrix}, \quad \eta_{ab} = \eta^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta_b^a = \delta_b^a. \qquad \textbf{[2.4.3]}$$

Usando estas coordenadas, **[2.3.1]** se puede escribir:

$$x^a x_a = \eta_{ab} x^a x^b = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \qquad \textbf{[2.4.4]}$$

Invariancia de la propagación de la luz: Ahora se puede determinar la transformación de coordenadas que deja invariante a la esfera de luz en ambos sistemas de referencia.

A diferencia de las transformaciones de Galileo donde la coordenada del tiempo se mantuvo constante, ésta también se transforma aquí: La definición de la escala de tiempo tendrá que ser ajustada a la propagación de la luz.

Estas transformaciones deben cumplir con ser *uno-a-uno*, así que ningún punto finito debe tener su imagen en infinito; y desde luego son transformaciones lineales.

Estas transformaciones tienen la forma:

$$x^{n'} = L_a^{n'} x^a, \qquad x_{m'} = L_{m'}^b x_b, \qquad L_{m'}^b = \eta_{n'm'}\eta^{ab} L_a^{n'} \qquad \textbf{[2.4.5]}$$

Nótese que $\eta_{n'm'}$ y η^{ab} tienen las mismas componentes numéricas.

Para dar a la esfera la misma forma $x_n x^n = 0 = x^{n'} x_{n'}$ en ambos sistemas coordenados, las transformaciones **[2.3.5]** deben satisfacer:

$$x^{n'} x_{n'} = L_a^{n'} L_{n'}^b x^a x_b = x^b x_b \qquad \textbf{[2.4.6]}$$

Que para todas las x^a es posible solo sí:

$$L_a^{n'} L_{n'}^b = \delta_b^a, a, b, n' = 1, \dots, 4 \qquad \textbf{[2.4.7]}$$

Estas ecuaciones definen las *Transformaciones de Lorentz* (y fueron presentadas en 1887 por Waldenmar Voit).

Ahora podemos determinar la transformación de Lorentz que corresponde a un movimiento a velocidad constante en la dirección del eje X.

Entonces, considérese:

$$\begin{matrix} x' = Ax + Bct, & y = y' \\ ct' = Cx + Dct, & z' = z \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad x^{n'} = L_a^{n'} x_a \qquad \textbf{[2.4.8]}$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & B \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} \qquad \textbf{[2.4.9]}$$

Ahora bien, considerando las expresiones de las *pseudo* distancias:

$$(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = (ct')^2 - \left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) \qquad \textbf{[2.4.10]}$$

Las cuales tienen la misma forma en ambos marcos de referencia y según los postulados de la Relatividad Especial.

Tomando en cuenta que el movimiento relativo es a lo largo del eje X en cada marco de referencia; es decir que, $y' = y$ y $z' = z$, la ecuación anterior se simplifica a:

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 \qquad \textbf{[2.4.11]}$$

Sustituyendo en esta ecuación la expresión **[2.4.8]** se obtiene:

$$(ct)^2 - x^2 = [(Cx)^2 + (Dct)^2 + 2CDcxt] - [(Ax)^2 + (Bct)^2 + 2ABcxt] \qquad \textbf{[2.4.12]}$$

Comparando los coeficientes para x^2, t^2 y xt se obtienen tres condiciones:

$$A^2 - C^2 = 1, D^2 - B^2 = 1 \text{ y } AB = CD,$$

que pueden ser resueltas de manera paramétrica, obteniéndose:

$$A = D = cosh\,\varphi \text{ y } B = C = -\,senh\,\varphi.$$

Así que las transformaciones de Lorentz quedan dadas por:

$$\begin{aligned} x' &= x\,cosh\,\varphi - ct\,senh\,\varphi\,, y' = y \\ ct' &= -x\,senh\,\varphi + ct\,cosh\,\varphi\,, \qquad z' = z \end{aligned} \qquad \textbf{[2.4.13]}$$

La analogía con una rotación del tipo:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\,sen\,\varphi\,, y = y' \\ ct' &= -x\,sen\,\varphi + y\cos\varphi\,, z = z' \end{aligned} \qquad \textbf{[2.4.14]}$$

Resulta obvia, aunque se necesita entender el significado de φ (*fi*) en la pseudo-rotación expresada en la ecuación **[2.4.13]**.

Para ello, considérese el movimiento del origen $x' = 0$ del sistema S' como es observado desde S.

Desde $x' = 0$ con las ecuaciones **[2.4.13]** se tiene que:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{c\,senh\,\varphi}{cosh\,\varphi} \qquad \Longrightarrow \qquad tanh\,\varphi = \frac{v}{c} \qquad \textbf{[2.4.15]}$$

Donde φ se encuentra relacionado con la velocidad v de manera simple.

Considerando el hecho de que:

$$cosh^2\,\varphi - senh^2\,\varphi = 1 \qquad \textbf{[2.4.16]}$$

Entonces, se puede escribir:

$$1 - tanh^2\,\varphi = \frac{1}{cosh^2\,\varphi} = 1 - \left[tanh\left(tanh^{-1}\frac{v}{c}\right)\right]^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \qquad \textbf{[2.4.17]}$$

De donde:

$$cosh\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad y \qquad senh\,\varphi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \textbf{[2.4.18]}$$

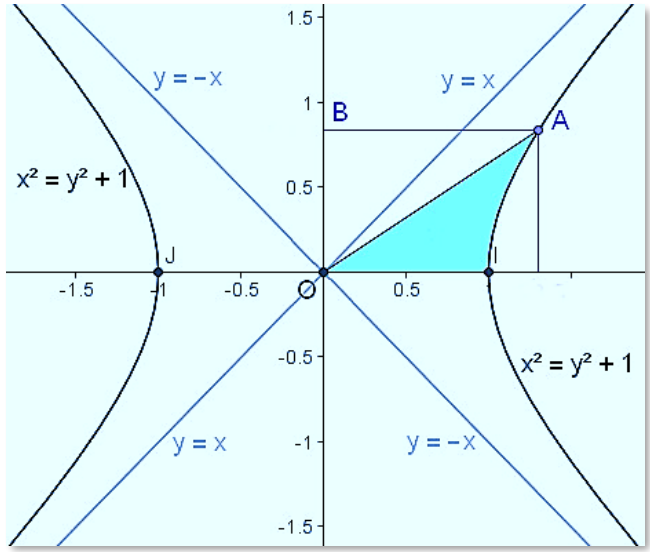


Figura 2.4.1: $A(x,y), B(0,y) \Rightarrow\ senh\,\varphi = y, cosh\,\varphi = x$

Al sustituir estas expresiones en la pseudo-rotación, se obtiene la forma bien conocida:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \textbf{[2.4.19]}$$

Que es la transformación de Lorentz "especial" encontrada anteriormente en las ecuaciones **[2.4.6]**. Para velocidades pequeñas, $v/c \ll 1$, esta transformación se reduce a la transformación $x' = x - vt$ de Galileo. Así pues, se comprueba que la mecánica newtoniana es válida para velocidades pequeñas, de modo que solo aparecerán discrepancias en los casos en los que se trate con partículas que se muevan a gran velocidad.

Si se resuelve **[2.4.19]** para x^a, se obtienen las mismas ecuaciones, pero con signo contrario para la velocidad; es decir, en vez de v se obtiene $-v$.

3 El Espacio de Minkowsky

3.1 Consecuencias de las Transformaciones de Lorentz

La Geometría Relativista de Minkowsky permite visualizar los eventos que se encuentran conectados en el espacio-tiempo entre sí. Es decir, los que ocurren para un observador en la misma región del espació y en el mismo intervalo temporal. El concepto de "*simultaneidad"* se vuelve relativo, en el sentido de que eventos que para un observador en un SRI ocurren al mismo tiempo, para otro observador en otro SRI no serán simultáneos.

Pero aquí *¡cuidado!*: Dos o más eventos pueden estar conectados causalmente o solo espaciotemporalmente.

- En el primer caso: en ningún SRI se podrán ver los efectos antes de las causas. Se verificará sin duda la contracción del ´tiempo, pero siempre sin violar la causalidad lógica.
- En el segundo caso, cuando dos o más eventos son independientes entre sí, pero se ven simultáneos en un SRI, estos podrán verse en diferente orden temporal en otros SRI's.

Aceptando los postulados de la Relatividad Especial el concepto de tiempo deja de considerarse una variable de cambio absoluto y se integra a los sistemas de referencia dando lugar al espacio-tiempo cuatridimensional, donde tres de las coordenadas son espaciales y la cuarta es el tiempo.

A esta variedad lorentziana de cuatro dimensiones y curvatura nula se le conoce como el *espacio-tiempo de Minkowsky*, y es usada para describir los fenómenos físicos en el marco de la teoría especial de la relatividad de Einstein. La descripción matemática de dicho espacio queda definida por las coordenadas de Minkowsky:

$$x^a = (x^\alpha, ct) = (\boldsymbol{r}, ct), x_a = \eta_{ab} x^b = (x_\alpha, -ct) \qquad \textbf{[3.1.1]}$$

Un punto en este espacio queda caracterizado especificando el espacio y el tiempo, y es llamado *evento*.

Las propiedades métricas del espacio de Minkowsky están dadas por su elemento lineal:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = d\boldsymbol{r}^2 - c^2dt^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b \qquad \textbf{[3.1.2]}$$

Este elemento lineal es invariante ante las transformaciones de Lorentz

$$x^{n'} = L_a^{n'} x_a, \quad L_a^{n'} L_{n'}^b = \delta_b^a \qquad \textbf{[3.1.3]}$$

NOTA: ds^2 no está definida como una cantidad necesariamente positiva!

3.2 Cuadrivectores y Conos de Luz

Un ejemplo de cuadrivector de la forma $a^n = (a^1, a^2, a^3, a^4) = (\boldsymbol{a}, a^4)$ es el vector que conecta dos puntos o eventos E_1 y E_2, del espacio de Minkowsky:

$$\overrightarrow{E_1E_2} = (x^2 - x^1, y^2 - y^1, z^2 - z^1, ct^2 - ct^1), \quad L_a^{n'} L_{n'}^b = \delta_b^a \qquad \textbf{[3.2.1]}$$

Obviamente, una transformación de Lorentz combinará la parte espacial y la parte temporal del cuadrivector, pero dejará fija la "pseudo longitud"; es decir:

$$a^{n'} a_{n'} = L_m^{n'} L_{n'}^b a^m a_b = a^n a_b = inv. \qquad \textbf{[3.2.2]}$$

Esta invariante puede tener cualquier signo o ser cero, dependiendo del tamaño relativo de las partes espacial y temporal del vector.

Así pues, se tiene la siguiente clasificación de estos cuadrivectores:

$$a^n a_n = a^2 - (a^4)^2 \begin{cases} > 0 \; distancia \; espacial \\ = 0 \; vector \; nulo \\ < 0 \; intervalo \; temporal \end{cases} \qquad \textbf{[3.2.3]}$$

Para un vector dado a^n, siempre es posible realizar una rotación espacial del sistema de coordenadas de modo que el vector $\boldsymbol{a}$ apunte en la dirección del eje X: $a^n = (a^1, 0, 0, a^4)$. La transformación de Lorentz **[2.3.19]** toma entonces la forma:

$$a'^1 = \frac{a^1 - v a^4/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad a'^4 = \frac{a^4 - v a^1/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \textbf{[3.2.4]}$$

Para $|a^1/a^4| > 1$ es posible eliminar a'^4 eligiendo $v \ll c$; y de manera similar puede hacerse para los otros casos. Así que se pueden obtener las siguientes formas normales para los cuadrivectores:

$$\textbf{Formas normales}: \begin{aligned} distancia \; espacial: \quad & a^n = (a, 0, 0, 0) \\ vector \; nulo: \quad & a^n = (0, 0, 0, 0) \\ intervalo \; temporal: \quad & a^n = (0, 0, 0, a) \end{aligned} \qquad \textbf{[3.2.5]}$$

Teniendo dos cuadrivectores a^n y b^n, entonces, puede definirse el producto escalar de ambos como:

$$|ab| = a^i b_i = \eta_{in} a^i b^n. \qquad \textbf{[3.2.6]}$$

Que por supuesto es una invariante ante las transformaciones de Lorentz. Cuando $|ab| = 0$ los vectores son llamados *ortogonales* o perpendiculares entre sí. En este sentido un vector nulo es perpendicular a sí mismo.

Una onda de luz que se propaga desde el tiempo $t = 0$ desde el origen del sistema de coordenadas habrá alcanzado, al tiempo t, el punto $\boldsymbol{r}$, lo que se puede escribir como:

$$\boldsymbol{r}^2 - c^2t^2 = 0 \qquad \textbf{[3.2.7]}$$

Si se elimina una de las coordenadas espaciales, esta ecuación describe un cono en el espacio (x, y, ct) mismo que es llamado *cono de luz*.

Como se muestra en la siguiente figura, el cono de luz separa los vectores de intervalos temporales en su interior de los vectores de distancias espaciales en su exterior. Los vectores nulos llamados *líneas de universo* son tangentes al cono de luz.

Cono de Luz: un pulso de luz en la posición $(0,0,0,0)$ envía una onda esférica expansiva con ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$$

o bien,

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 0$$

El cono de luz es una proyección en el hiperplano $x^3 = 0$.

La relatividad especial establece que ningún objeto puede viajar a una velocidad mayor que c, ya que si $v > c$ entonces $\sqrt{1 - v^2/c^2} \in \mathbb{C}$.

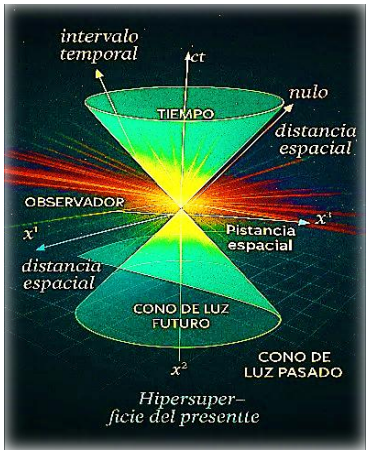


Figura 3.2.1: Cono de luz.

¡La información no puede viajar más rápido que la velocidad de la luz!

Por lo anterior, si un evento ocurre en S al tiempo $t = 0$ en la posición del origen; es decir, en $(0,0,0,0)$ aquellos otros sucesos o eventos que ocurran en el interior de su cono de luz podrán estar *conectados causalmente* con ese evento mientras que todos los que se encuentren fuera de su cono de luz estarán, necesariamente, *desconectados causalmente*.

Las transformaciones de Lorentz en el espacio de Minkowsky se pueden visualizar en una proyección en el plano dibujando las líneas $x' = 0$ y $ct' = 0$ como ejes X' y ct' respectivamente, para un valor dado de v/c.

En cualquier caso, los sistemas de referencia son completamente equivalentes, aunque a primera vista no lo parezcan.

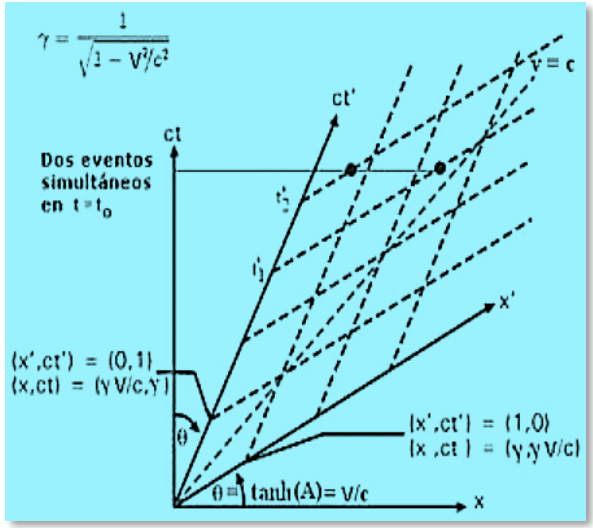


Figura 3.2.2: Diagrama de espacio-tiempo.

Los sucesos en S' están en la recta: $ct - (v/c)x = 0$. La línea de universo de S está en la recta $x - vt = 0$. Es importante notar que dos sucesos que son simultáneos en S no lo son en S'.

La transformación se vuelve singular para el caso en que $v = c$ y la línea de universo hace un ángulo de $45°$ con el eje ct.

Noción de Simultaneidad: consideramos el significado usual, "eventos que ocurren al mismo tiempo, pero en diferentes lugares".

Si un observador en el sistema de referencia S mide la posición de un objeto en la posición $x = 0$ (por ejemplo), para un observador que se encuentre en el sistema de referencia S' en movimiento a velocidad v respecto del sistema S, el objeto cambia de posición, y según la ecuación **[2.3.19]** se obtiene:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x' = \frac{-vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \textbf{[3.2.8]}$$

De modo que no hay una posición absoluta.

Ahora bien, intercambiando la situación espacial por una situación temporal se tiene que si el observador del sistema de referencia S establece que dos eventos en las posiciones x_A y x_B son simultáneos; es decir, son observados al mismo tiempo t_0, la aplicación de las transformaciones de Lorentz da como resultado:

$$ct'_A = \frac{ct_0 - vx_A/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad ct'_B = \frac{ct_0 - vx_B/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Longrightarrow c(t'_A - t'_B) = \frac{v(x_A - x_B)/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \textbf{[3.2.9]}$$

De modo que para el observador en el sistema de referencia S' los eventos han dejado de ser simultáneos; es decir: *no hay simultaneidad absoluta en diferentes lugares*.

¡En relatividad, la simultaneidad entre dos eventos depende del sistema de referencia, a menos que los dos eventos ocurran en el mismo punto del espacio!

Como consecuencia de lo anterior la Relatividad Especial prohíbe la existencia de cuerpos completamente rígidos.

Líneas de universo y tiempo propio: en mecánica no-relativista, el movimiento de una partícula puntual se describe dando la posición como una función del tiempo, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.

Algunas veces se usa la longitud de arco l definida como:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, x = x(l), y = y(l), z = z(l), t = t(l). \qquad \textbf{[3.2.10]}$$

Pero en relatividad se desea incorporar en la notación por igual al espacio y al tiempo, de modo que, se usa el concepto de tiempo propio τ:

$$-c^2 d\tau^2 = ds^2 = dx^n dx_n = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \qquad \textbf{[3.2.11]}$$

Así la línea de universo o trayectoria de una partícula en el espacio-tiempo está dada por:

$$x^n(\tau) = \big(\boldsymbol{r}(\tau), ct(\tau)\big) \qquad \textbf{[3.2.12]}$$

y se puede escribir **[3.2.11]** como:

$$\begin{aligned} -c^2 d\tau^2 &= -c^2 dt^2 (1 - d^2\boldsymbol{r}/c^2 dt^2) \\ &= -c^2 dt^2 (1 - v^2/c^2) \end{aligned} \qquad \textbf{[3.2.13]}$$

Con $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Donde $v = v(\tau)$ es la velocidad de la partícula y en general no es constante.

Para una partícula en reposo el tiempo y el tiempo propio coinciden.

Para una partícula en movimiento la trayectoria se conoce como línea de universo, e incluye la parte espacial y la parte temporal.

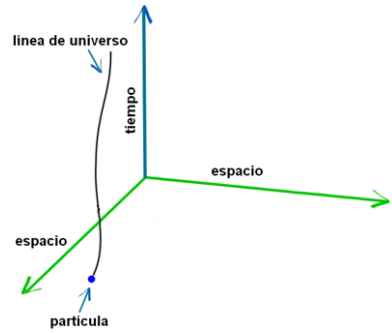


Figura 3.2.3: Línea de Universo.

4 La Mecánica de la Relatividad Especial

4.1 Cinemática Relativista

Algunos de los resultados más importantes de la cinemática relativista estriban en la mejora de precisión en las mediciones de sistemas que se desplazan a altas velocidades, sin importar si se encuentran en la escala astronómica, o en la submicroscópica, pasando por todas las intermedias.

Así podemos calcular desde el análisis de espectros ópticos de objetos estelares como son estrellas o hasta galaxias veloces y con ello la determinación de el corrimiento de sus frecuencias y sus velocidades; o bien las energías de electrones y otras partículas emitidas en descomposiciones radioactivas.

Y desde luego trabajar el magnetismo de los diversos materiales y lograr una eficaz transmisión de todo tipo de datos.

Transformación relativista de la velocidad: Considérese un objeto en movimiento respecto de los sistemas inerciales S y S' que se mueven con velocidad relativa v uno respecto del otro. Las componentes de su velocidad se pueden expresar en ambos sistemas como sigue,

En S:

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt}; \tag{4.1.1}$$

y en S':

$$V_x' = \frac{dx'}{dt}, \quad V_y' = \frac{dy'}{dt}, \quad V_z' = \frac{dz'}{dt}. \tag{4.1.2}$$

Diferenciando las ecuaciones de transformación inversa de Lorentz:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4.1.3}$$

se tiene:

$$dx = [dx' + vdt']\gamma, \quad dy = dy', \quad dz = dz'; \tag{4.1.4}$$

$$dt = [dt' + vdx'/c^2]\gamma$$

Donde claramente, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

De este modo,

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + vdx'/c^2} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{vdx'}{c^2 dt'}} \qquad [4.1.5]$$

o bien,

$$V_x = \frac{V_x' + v}{1 + \frac{vV_x'}{c^2}}, \quad V_y = \frac{V_y'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{vV_x'}{c^2}}, \quad V_z = \frac{V_z'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{vV_x'}{c^2}}. \qquad [4.1.6]$$

4.2 Consecuencias de las Transformaciones de Velocidad

Aberración óptica: El ángulo de inclinación con el que se reciben los rayos luminosos depende de la velocidad del observador, el hecho de que $\alpha \neq \alpha'$ se conoce como "aberración óptica".

Así se tiene para el sistema de referencia S:

$$c_x = c\cos\alpha, \;\; c_y = c\,sen\,\alpha;$$

y para S':

$$c_x' = c\cos\alpha', \;\; c_y' = c\,sen\,\alpha'$$

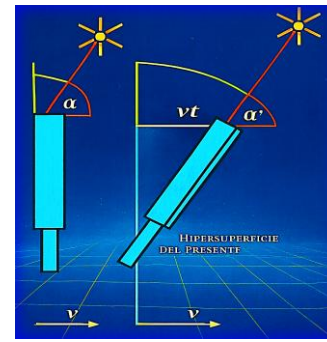


Figura 4.2.1: Aberración óptica.

Ya que solo es invariante la velocidad de la luz y no sus componentes.

Así, entonces con las ecuaciones anteriores y usando las transformaciones de velocidades **[4.1.6]**:

$$cos\,\alpha' = \frac{cos\,\alpha + (v/c)}{1 + (v/c)\cos\alpha}, \qquad sen\,\alpha' = \frac{\gamma^{-1}\,sen\,\alpha}{1 + (v/c)\cos\alpha} \qquad [4.2.1]$$

Ahora bien, usando la fórmula trigonométrica:

$$tan\frac{\theta}{2} = \frac{sen\,\theta}{1 - cos\,\theta} \qquad [4.2.2]$$

Entonces se puede escribir la fórmula de aberración óptica relativista en forma compacta:

$$tan\frac{\alpha'}{2} = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}\,tan\frac{\alpha}{2} \qquad [4.2.3]$$

Que permite encontrar en forma gráfica el ángulo de aberración.

Efecto Doppler clásico y relativista: Desde el punto de vista clásico de las ondas sonoras, para las cuales la fuente y el observador se pueden mover con velocidades v_s y v_o con respecto al medio, la frecuencia ν' que percibe el observador es diferente a la frecuencia emitida por la fuente, de modo que: $\nu' = \nu(v \pm v_o)/(v \mp v_s)$, donde v es la velocidad de las ondas en el medio (velocidad del sonido) y los signos se eligen según si el movimiento es de aproximación o alejamiento entre la fuente y el observador, respectivamente.

En el caso relativista las ondas electromagnéticas se propagan de modo que el efecto Doppler contiene la información del desplazamiento relativo entre la fuente y el observador en movimiento.

Así, para una fuente de luz que emite una frecuencia ν, un observador en un sistema de referencia S' que se mueva con velocidad u con respecto de la fuente, medirá una frecuencia mayor al acercarse y una menor en caso de alejarse de la fuente.

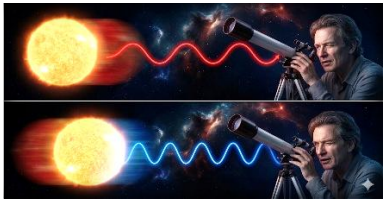


Figura 4.2.2: Efecto Doppler.

Si T' es el tiempo entre crestas de la onda medido por el observador en movimiento y λ' es la longitud de onda determinada por este observador, la distancia entre las crestas de las ondas es: $\lambda' = (c-u)T'$. Pero según la ecuación para la dilatación del tiempo: $T' = T\gamma$; donde, $T = 1/\nu$.

La longitud de onda medida por el observador en movimiento debe cumplir el hecho de que: $c = \lambda'\nu'$. Entonces:

$$\frac{c}{\nu'} = (c-u)\frac{T}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{1}{\nu}\frac{(c-u)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad \textbf{[4.2.4]}$$

O bien,

$$\nu' = \nu\frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-u/c} = \nu\sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}} \qquad \textbf{[4.2.5]}$$

Que es la fórmula para el efecto Doppler consistente con los postulados de la relatividad de Einstein.

Si el movimiento entre la fuente y el observador es de alejamiento bastará con reemplazar u por $-u$.

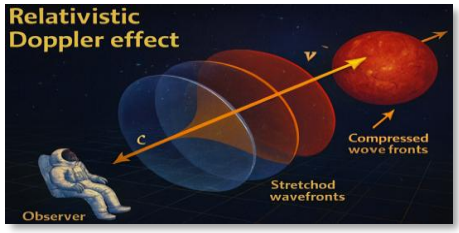


Figura 4.2.3: Efecto Doppler.

Cuadri-velocidad: usando la representación de líneas de universo (trayectorias en el espacio-tiempo) $x^n = x^n(\tau)$ y el parámetro τ se puede escribir una generalización cudrivectorial a la velocidad tridimensional.

Así se puede definir la cuadri-velocidad u^n de la siguiente forma:

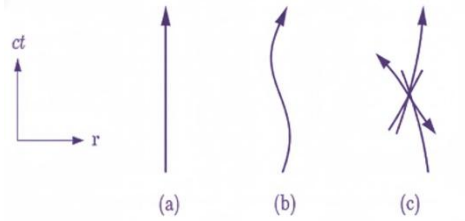


Figura 4.2.4: Líneas de universo. (a) partícula en reposo, (b) partícula acelerada, (c) choque de dos partículas.

$$u^n(\tau) = \frac{dx^n}{d\tau} = \frac{dx^n}{dt\sqrt{1-u^2/c^2}} = \left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) \qquad [4.2.6]$$

Donde la cuadri-velocidad por [3.2.11] obedece que:

$$u^n u_n = \frac{dx^n}{d\tau}\frac{dx_n}{d\tau} = -c^2 \qquad [4.2.7]$$

La ecuación anterior muestra que las cuatro componentes u^n no son independientes entre sí, y que u^n generaliza al vector tangente $d\boldsymbol{r}/dt$.

Cuadri-aceleración: de manera similar se define la cuadri-aceleración como:

$$\dot{u}^n = \frac{du^n}{d\tau} = \frac{d^2x_n}{d\tau^2} \qquad [4.2.8]$$

Debido a la ecuación [4.2.7] se tiene que:

$$d(u^n u_n)/d\tau = 0 = \dot{u}^n u_n \qquad [4.2.9]$$

Así que, la cuadri-velocidad y la cuadri-aceleración son ortogonales entre sí.

Sistema de partícula en reposo: Como en general $v(\tau)$ no es constante, una partícula acelerada no puede transformarse a un sistema en reposo mediante una transformación de Lorentz. En todo caso esto es posible solo por un instante de tiempo $\tau = \tau_0$. De donde se tiene que:

$$u^n(\tau_0) = (0,0,0,c) \qquad [4.2.10]$$

Los Sistemas de Posicionamiento Global GPS: determinan la posición de un objeto a partir de los datos que reciben de varios satélites. Para que esta información sea precisa, los relojes de los satélites y de la Tierra deben de estar sincronizados. Los satélites orbitan a una altitud de unos 20,200 km sobre la superficie de la Tierra completando una vuelta cada 12 horas aproximadamente.

Las células de telefonía móvil utilizan la referencia posicional y temporal del GPS. Las transacciones financieras calculan los intereses valiéndose del GPS. Los barcos reciben una ayuda inestimable ahí donde no hay referencias visuales. Y nosotros, en nuestros vehículos, podemos contar con navegadores que nos ayudan a llegar a destino.

El GPS consta de un sistema de satélites cada uno de los cuales lleva a bordo un reloj, gracias a que el satélite trasmite dónde está y qué hora es donde está, el software de nuestro navegador puede, utilizando cuatro satélites, calcular nuestra posición espaciotemporal sobre la superficie de la Tierra.

Los satélites orbitan a una velocidad grande, aunque no lo bastante grande para ser comparada con la velocidad de la luz. Sin embargo, como los relojes que llevan dentro son muy precisos y son capaces de medir intervalos de tiempo muy pequeños, resulta que esta velocidad pasa a ser relevante y hay que considerar el efecto de la dilatación temporal.

Además, hay otro efecto relativista, esta vez asociado a la relatividad general, y es que por el hecho de estar orbitando en torno a un objeto que tiene una gran masa, como es la Tierra, los efectos de la relatividad general sobre el tiempo también son relevantes.

Al final, los ingenieros de GPS han tenido que tomar en cuenta estas dos correcciones relativistas. Si no lo hicieran, el posicionamiento acumularía un error de 11 kilómetros al día.

Realmente, la Relatividad no es imprescindible para calcular una posición más o menos aproximada, pero sí, si queremos una precisión por debajo de $30\ m$; ahí es cuando deberemos tener en cuenta las correcciones de la relatividad.

Figura 4.2.4: GPS.

Estas pequeñas correcciones se deben a la diferencia de atracción gravitatoria entre lo que hay en la superficie terrestre, y los satélites orbitando, que hacen variar mínimamente (un adelanto de 45 nanosegundos) la percepción del tiempo desde cada uno de los diferentes relojes.

4.3 Dinámica Relativista

La equivalencia entre la masa y la energía se ocultaba tras 2 integrales. Einstein supo encontrarlas e interpretar este importante resultado que permitió conectar de manera definitiva al movimiento con los componentes fundamentales del Universo: materia (4%), radiación (1%), materia oscura (27%) y energía oscura (68 %). Revitalizando la idea de encontrar una Teoría Unificada que explique todo cuanto ocurre como manifestaciones del propio espacio-tiempo.

Pero *¿cómo puede desaparecer la masa para convertirse en energía, o bien acumularse tanta energía en alguna región del universo que dé lugar a la aparición de masa?*

En realidad, es la Cosmología la que intenta contestar estas cuestiones mediante modelos que pretenden explicarlo todo con base en unas cuantas propiedades del espacio-tiempo y de su evolución.

Conservación de la cantidad de movimiento: un análisis del comportamiento de los objetos en movimiento, a la hora de interaccionar nos permitirá encontrar resultados realmente sorprendentes:

Considérese un choque elástico (en que se conserva la energía cinética) entre dos partículas idénticas A y B, con masas m_A y m_B respectivamente, el choque es visto por observadores situados en sistemas de referencia inerciales S y S' que tienen un movimiento relativo a velocidad constante v en la dirección del eje X.

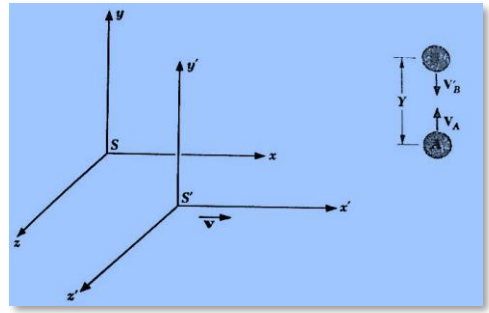


Figura 4.3.1: Choque elástico.

Estando antes del choque la partícula A en reposo respecto del sistema S y la partícula B con respecto al sistema S'.

En el mismo instante, A se lanza en dirección $+Y$ con velocidad V_A, y B en el sentido $-Y$ con velocidad V'_B.

De modo que, $|V_A| = |V'_B|$.

En estas condiciones, el comportamiento de A, visto desde S, es exactamente el mismo que el de B visto desde S', aunque con signo contrario por la dirección del movimiento.

Si las partículas se lanzan desde posiciones separadas una distancia d, a un observador en A le parecerá que el choque ocurre en $y = d/2$, y a uno en S' le parecerá que ocurre en $y' = -d/2$.

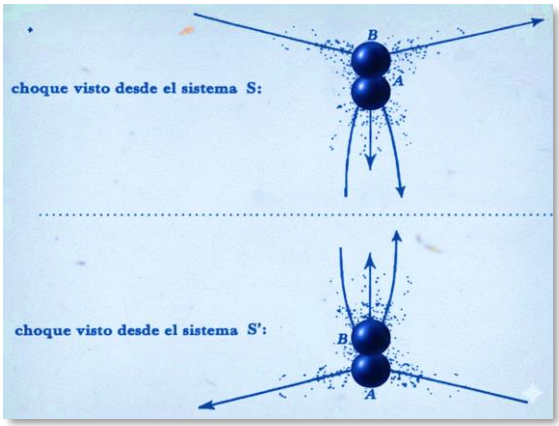


Figura 4.3.2: Choque elástico visto desde S y S'.

El tiempo T_0 que invierte A en el recorrido de ida y vuelta, medido en el sistema S, es, por tanto: $T_0 = d/V_A$ y es el mismo para B en S', $T_0' = (-d)/(-V_B')$.

Si se conserva la cantidad de movimiento en el sistema S se tiene que:

$$m_A V_A = -m_B V_B \qquad \textbf{[4.3.1]}$$

En S la velocidad de B tiene el valor: $-V_B = -d/T$, donde T es el tiempo que tarda B en su recorrido ida y vuelta, medido en S.

Sin embargo, en S' el recorrido de B requiere el tiempo T', donde $T' = T\gamma$.

Sustituyendo T' en la ecuación para la velocidad de B, se tiene que: $-V_B = -d/T\gamma$; y como $V_A = d/T$, al reemplazar estas expresiones para las velocidades en la ecuación de conservación del momento se obtiene: $m_A = m_B/\gamma$.

Según la hipótesis original, las masas de A y B eran idénticas cuando se encontraban en reposo respecto del observador. Entonces, con el resultado obtenido, las mediciones de masa, así como las de espacio y tiempo dependen de la velocidad relativa entre el observador y lo que observa.

Haciendo $m_A = m_0$ y $m_B = m$, se obtiene la conocida fórmula:

Relatividad de la masa: $m = m_0\gamma$ **[4.3.2]**

No deja de ser sorprendente que la masa de un objeto en movimiento aumente con la velocidad relativa entre el observador y el objeto.

Sin embargo, es más correcto afirmar que lo que aumenta es el momento y la energía del objeto, mientras que la masa se podrá escribir en el vector de cuadrimomento que debe ser invariante; es decir, independiente del movimiento del observador, como del objeto mismo.

Definiendo la cantidad de movimiento como: $mv = m_0 v\gamma$, su conservación es válida en Relatividad Especial, así como en Mecánica Clásica.

Masa y energía: Considérese la energía cinética T de un cuerpo en movimiento como el trabajo realizado para llevarle del reposo a su estado de movimiento. Es decir,

$$T = \int_0^s F ds \qquad \textbf{[4.3.3]}$$

Utilizando la forma relativista de la segunda ley de movimiento de Newton: $F = d(mv)/dt$ la expresión para la energía cinética se convierte en:

$$T = \int_0^s \frac{d(mv)}{dt} ds = \int_0^{mv} v\, d(mv) = \int_0^v v\, d\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \qquad \textbf{[4.3.4]}$$

Integrando por partes, $\int xdy = xy - \int ydx$:

$$T = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 \int_0^v \frac{vdv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}\Big]_0^v = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2$$

De donde se obtiene el resultado: $T = mc^2 - m_0 c^2$.

Interpretando el término mc^2 como la energía total E de un cuerpo, se deduce que aun cuando el cuerpo se encuentre en reposo y $T = 0$, posee no obstante la energía: $E_0 = m_0 c^2$.

Con estos resultados se llega la expresión para la energía total $E = E_0 + T$ de una partícula:

$$E = mc^2 \Longrightarrow E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{\frac{m_0^2 c^4}{1 - v^2/c^2}} \Longrightarrow E^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 c^4$$

$$\Longrightarrow E^2 - E^2 \frac{v^2}{c^2} = m_0^2 c^4 \Longrightarrow E^2 - m^2 c^4 \frac{v^2}{c^2} = E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4,$$

de donde se obtiene finalmente, la conocida ecuación:

Energía total de una partícula: $$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \qquad \textbf{[4.3.5]}$$

Fuerza sobre una partícula:

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{v}\frac{dm}{dt} \qquad [4.3.6]$$

Como la energía total es $E = mc^2$; entonces se puede escribir $m = E/c^2$, de donde,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{dE}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(T + m_0c^2) = \frac{1}{c^2}\frac{dT}{dt} \qquad [4.3.7]$$

Donde T es la energía cinética (¡no debe confundirse con el tiempo!), y se tiene que:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l})}{dt} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \qquad [4.3.8]$$

Por lo tanto,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \qquad [4.3.9]$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación [4.3.6] se obtiene:

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v})}{c^2} \qquad [4.3.10]$$

Donde el segundo término de la derecha es un vector en la dirección de $\boldsymbol{v}$.

En la expresión [4.3.10] se aprecia que en general la aceleración $\boldsymbol{a}$ no es paralela a la fuerza $\boldsymbol{F}$; es decir, $\boldsymbol{a} \nparallel \boldsymbol{F}$ siempre. ¡El último término se encuentra en la dirección de $\boldsymbol{v}$!

Casos Particulares:

i. $\boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{v}$. Entonces, $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{v}$. Esta aceleración se puede denotar como: $\boldsymbol{a}_{\parallel}$.

En este caso se puede escribir:

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{v}\frac{dm}{dt} \qquad [4.3.11]$$

Sustituyendo $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, se llega a que:

$$\boldsymbol{F} = \frac{m_0\boldsymbol{a}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \qquad [4.3.12]$$

Así se puede escribir:

$$\boldsymbol{F}_{\parallel} = \frac{m_0}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}}\boldsymbol{a}_{\parallel} \qquad [4.3.13]$$

Y donde, $m_0/(1-v^2/c^2)^{3/2}$ se conoce como masa longitudinal.

ii. $\boldsymbol{F} \perp \boldsymbol{v}$. Como $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = 0$, entonces $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{v}$, lo que se denota: $\boldsymbol{a}_{\perp}$.

En este caso la ecuación y según la ecuación [4.3.10] se tiene que:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} - \frac{\boldsymbol{v}}{mc^2}(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}) \qquad \textbf{[4.3.14]}$$

Entonces,

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} - \frac{\boldsymbol{v}}{mc^2}(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}) \qquad \textbf{[4.3.15]}$$

Como el segundo término es cero, se tiene entonces:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = \boldsymbol{F}\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{m_0} \qquad \textbf{[4.3.16]}$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{F}_{\perp} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\boldsymbol{a}_{\perp} \qquad \textbf{[4.3.17]}$$

Donde el término de masa se conoce como *masa transversal*.

Este es el caso de una fuerza de la forma $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, en donde La fuerza que ejerce por un campo magnético sobre una partícula en movimiento no satisface los principios de la mecánica newtoniana.

4.4 Ecuaciones de Movimiento

La relatividad especial, junto con sus 2 postulados, se ha visto enriquecida mediante variados tratamientos matemáticos como las Transformaciones de Lorentz, la Matriz de Lorentz (que incluye rotaciones), la geometría de Minkowsky, el Lagrangiano relativista, la notación tensorial y la formulación covariante; entre otras...

Pueden parecer innecesarias cuando se trata de problemas de *Contracción de la Longitud* o *Dilatación del Tiempo* para los cuales un tratamiento algebraico parece suficiente.

Sin embargo, se vuelven indispensables al manejar operadores de *momento* y *energía* cuánticos o si se desea entender mejor las ecuaciones de Maxwell referidas a los campos eléctricos y magnéticos que realmente conforman un sólo objeto tetradimensional: el "Tensor de Campo Electromagnético".

Aún con los resultados anteriores y considerando que la mecánica newtoniana contradice la invariancia de Lorentz, se requiere que en las ecuaciones de movimiento se siga teniendo la aceleración proporcional a la fuerza; es decir:

$$m_0 \frac{d^2 x^n}{d\tau^2} = f^n \qquad \textbf{[4.4.1]}$$

La constante m_0 es llamada *masa propia* o *masa en reposo* y el cuadrivector f^n, la cuadri-fuerza o simplemente la fuerza.

Ya que la fuerza y la aceleración son cuadrivectores, y m_0 es invariante, la ecuación anterior es una invariante de Lorentz.

Así que, podemos escribir:

$$f^n = \left(\frac{\boldsymbol{F}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, f^4 \right) \qquad \textbf{[4.4.2]}$$

Sin que aún se haya determinado la componente f^4.

Componente espacial en la ecuación de movimiento: Insertando la expresión anterior en la ecuación **[4.4.1]**, y usando el hecho de que $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ se obtiene:

$$\frac{d}{dt} m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}, \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \textbf{[4.4.3]}$$

Así, para $v \ll c$, la masa m y la masa propia m_0 coinciden; y la energía cinética relativista $T = mc^2 - m_0 c^2$ recuperará su forma newtoniana:

Ya que $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$ si $x \ll 1$, entonces,

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 = \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) m_0 c^2 - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 \qquad \textbf{[4.4.4]}$$

Por lo que se tiene para la energía total, la expresión clásica:

$$E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \qquad \textbf{[4.4.5]}$$

Sin embargo, para velocidades grandes la masa crece tendiendo a infinito a medida que v se aproxima a c; lo que se traduce en que una fuerza finita $\boldsymbol{F}$ no puede acelerar una partícula de masa m hasta igualar su velocidad con c (lo cual le tomaría un tiempo infinito).

Componente temporal en la ecuación de movimiento: la ecuación de movimiento de Newton no tiene una componente temporal (de intervalo de tiempo), de manera que la expresión relativista tendrá un mayor contenido.

Si se escribe la ecuación de movimiento como:

$$m_0 \dot{u}^n = f^n \qquad \textbf{[4.4.6]}$$

Y se multiplica por u_n, según la ecuación **[4.2.7]** que establece: $d(u^n u_n)/d\tau = 0 = \dot{u}^n u_n$, se obtiene:

$$f^n u_n = 0 \qquad \textbf{[4.4.7]}$$

Análogamente a la aceleración, la fuerza debe ser ortogonal a la cuadri-velocidad. Esta relación, entonces puede usarse para determinar f^4.

Haciendo un desarrollo similar al seguido en la expresión **[4.2.6]** se puede escribir **[4.4.2]** como:

$$f^n = \left(\frac{\boldsymbol{F}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\boldsymbol{Fv}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \qquad \textbf{[4.4.8]}$$

Entonces, la componente de intervalo de tiempo de la ecuación de movimiento se lee:

$$\frac{d}{dt} mc^2 = \boldsymbol{Fv} \qquad \textbf{[4.4.9]}$$

Que es una relación similar a la que aparece en la mecánica newtoniana si se multiplica $m d\boldsymbol{v}/dt = \boldsymbol{F}$ por $\boldsymbol{v}$ y se escribe el resultado como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \boldsymbol{Fv} \qquad \textbf{[4.4.10]}$$

Y que expresa como cambia la energía cinética $mv^2/2$ con el tiempo. De modo que por analogía se concluye que **[4.4.9]** es la ecuación de balance para la energía cinética de la partícula.

Esta interpretación es consistente con el hecho que la energía y la masa inercial son lo mismo salvo por el factor c^2:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \textbf{[4.4.11]}$$

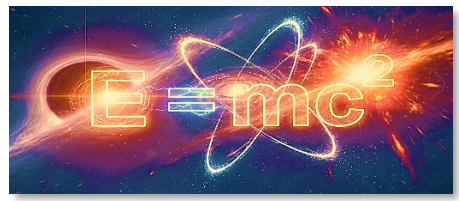


Figura 4.4.1: "La masa y la energía no se crean ni se destruyen, solo se transforman".

5 Cálculo Tensorial

La palabra *tensor* fue introducida por William R. Hamilton en 1846, para designar lo que actualmente se conoce como módulo. No fue hasta 1899 cuando Waldemar Voigt usó esta palabra en su acepción actual. Etimológicamente tensor proviene del latín *tensus*, participio pasado de *tendere*, cuyo significado es "estirar, extender o tensar".

La teoría de la elasticidad fue una de las primeras ramas de la Ciencia donde se usaron los tensores. La teoría de tensores fue desarrollada alrededor de 1890 por Gregorio Ricci-Curbastro bajo el título de Geometría Diferencial Absoluta, y se hizo accesible a muchos matemáticos gracias a la publicación del texto clásico de Tullio Levi-Civita en 1900.

Sin embargo, el Cálculo Tensorial tuvo que esperar hasta 1915 para ser visto como un arma potentísima, cuando Einstein basó en éste su Teoría de la Relatividad General. A partir de entonces, los tensores se utilizan también dentro de otros campos, por ejemplo, la mecánica de medios continuos (tensor de esfuerzos o elasticidad lineal).

Una de las principales características de los tensores es que sus propiedades son independientes de los sistemas de referencia usados para determinarlos. Por lo que constituyen una herramienta muy útil para el estudio de las leyes naturales.

Elasticidad (mecánica de sólidos): Para el caso de un sólido deformable, se define la *tensión* en un punto $P(x, y, z)$ al *límite* de la fuerza neta aplicada por unidad de área sobre una pequeña región en un plano η que contenga el punto; y, en general, dependerá de cada punto del cuerpo y de la orientación del plano escogido para calcular dicho *límite*.

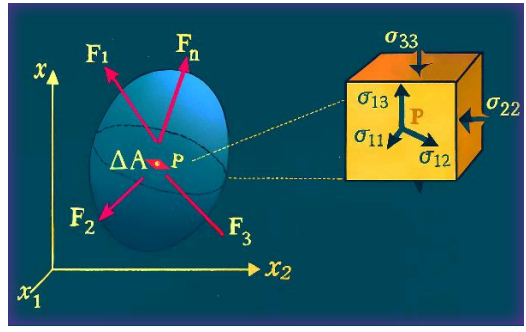


Figura 5.1: Componentes del *tensor tensión* en el punto *P* de un sólido deformable.

Puede probarse que la normal al plano escogido η y la tensión t_η en un punto están relacionadas por:

$$t_\eta = \mathbf{T}(\eta)$$

Donde $\mathbf{T}(\eta)$ es el llamado *tensor de tensión*, y que al fijar una base vectorial ortogonal (i, j, k) viene representado por una matriz simétrica 3×3:

$$\mathbf{T}(\eta) = \mathbf{T_{ij}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & \sigma_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

La primera matriz es la forma común de escribir el *tensor de tensión* en física y la segunda forma usa las convenciones comunes en ingeniería.

Dada una región en forma de ortoedro con caras paralelas a los ejes coordenados situado en el interior un sólido elástico tensionado las componentes en la diagonal σ_{xx}, σ_{yy} y σ_{zz} dan cuenta de cambios de longitud en las tres direcciones, pero que no distorsionan los ángulos del ortoedro, mientras que las componentes σ_{xy}, σ_{yz} y σ_{zx} están relacionadas con la distorsión angular que modificaría el ortoedro para convertirlo en un paralelepípedo.

Deformación: Para pequeños cambios en un sólido deformable, se puede asegurar que existe una relación lineal (al menos en primera aproximación) entre los desplazamientos y la deformación.

Los componentes de la diagonal principal contienen los alargamientos y/o contracciones mientras que el resto de los componentes del tensor son los "medios desplazamientos".

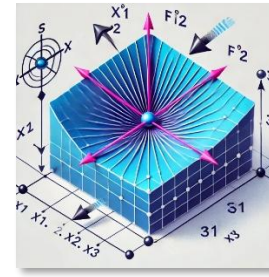


Figura 5.2: Deformación.

Las componentes están linealmente relacionadas con los desplazamientos mediante esta relación:

$$\sigma_{ij} = 1/2\left(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i\right)$$

5.1 Convención de Einstein y Álgebra de Tensores

Después de definir al tiempo como un parámetro o dimensión más, nuestra álgebra vectorial cambio a 4 dimensiones: lo que llamamos el espacio-tiempo, constituido por cudrivectores de posición, velocidad, momento, etc.

Aunado a ello tenemos las matrices de Lorentz-Minkowsky que nos permiten transformar las coordenadas de un Sistema de Referencia Inercial *S* a otros, *S′, S″, S‴, …*y por si fuera poco, necesitaremos modificar la métrica para considerar espacios curvados por la presencia de las masas gravitacionales (según estudiaremos más adelante).

Así pues, para extender la Relatividad a sistemas NO inerciales (acelerados) se requiere del **Cálculo Tensorial** cuya notación suele ser engorrosa por la cantidad de índices y subíndices que aparecen en las operaciones. Por ese motivo resulta de extrema utilidad la notación de Einstein: al principio puede parecer confusa, pero a medida que se utiliza (con rigor) empieza a dar frutos en el sentido de que permite expresiones más simples y con más contenido.

En matemáticas y en física, un tensor es una entidad algebraica de varias componentes, que generaliza los conceptos de escalar, vector y matriz de una manera que sea independiente de cualquier sistema de coordenadas elegido. Usando la convención de suma de Einstein es posible reformular las expresiones del álgebra lineal y la de la teoría de matrices.

Índices repetidos en sumas: Cualquier expresión con 2 índices repetidos (abajo, arriba o arriba y abajo) debe entenderse como la suma de 1 a $n \in \mathbb{N}$ sobre los índices repetidos.

Los índices *libres* tendrán el mismo rango de 1 a $n \in \mathbb{N}$, en tanto no se especifique otra cosa.

NOTA: Ningún índice aparecerá más de dos veces en una expresión.

Así entonces,

$$a_i x_i \triangleq a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_n x_n = \sum_i^n a_i x_i \qquad [5.1.1]$$

Donde, $1 \leq i \leq n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo: Expresiones $a_{ii}x_k$ y $a_{ij}x_j$; con $1 \leq i, j \leq n$ para $n = 4$:

$$\Rightarrow \quad a_{ii}x_k = a_{11}x_k + a_{22}x_k + a_{33}x_k + a_{44}x_k$$
$$a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4$$

■

En general, el índice libre tomará valores de forma independiente.

Así que, en general:

$$a_{ij}x_j \neq a_{kj}x_j \qquad [5.1.2]$$

Ejemplo: $y_i = a_{ir}x_r$; para $r = 3$:

$$\Rightarrow \quad y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$$

Ahora sea $i = 1, 2, 3$:

$$\Rightarrow \quad y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$
$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

■

Sumas dobles: Indican sumas simultáneas en i y en j; 2 sumas dan n^2 términos, 3 sumas dan n^3 términos, 4 sumas dan n^4, etc.

Ejemplo: $a_{ij}x_iy_j$ es una expresión con sumas simultáneas en i y en j:

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} a_{ij}x_iy_j &= a_{1j}x_1y_j + a_{2j}x_2y_j + \cdots + a_{nj}x_ny_j \\ &= (a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1n}x_1y_n) \\ &+ (a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{2n}x_2y_n) \\ &+ (a_{31}x_3y_1 + a_{32}x_3y_2 + \cdots + a_{3n}x_3y_n) \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &+ (a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n) \end{aligned}$$

■

Ejemplo: Si $n = 2 \;\Rightarrow y_i = c_i^r a_{rs}x_s$ es una expresión que representa 2 ecuaciones:

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1^1 a_{11}x_1 + c_1^2 a_{21}x_1 + c_1^1 a_{12}x_2 + c_1^2 a_{22}x_2 \\ y_2 &= c_2^1 a_{11}x_1 + c_2^2 a_{21}x_1 + c_2^1 a_{12}x_2 + c_2^2 a_{22}x_2 \end{aligned}$$

■

Sustituciones: Sean $y_i = a_{ij}x_j$ y $Q = b_{ij}y_ix_j$, al sustituir directamente se obtiene la expresión errónea:

$$Q = b_{ij}a_{ij}x_jx_j \quad !$$

Esta expresión no es válida ya que repite más de 2 veces el índice j.

Para realizar la sustitución correctamente es necesario seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Identificar el o los índices mudos que se repetirán en la sustitución directa, en este caso, j.

Paso 2: Cambiar en una de las expresiones ese índice, así, por ejemplo, se puede escribir:

$$y_i = a_{ir}x_r$$

Cambiando el índice j por el índice r.

Paso 3: Sustituir y reordenar:

$$Q = b_{ij}y_ix_j = b_{ij}(a_{ir}x_r)x_j = a_{ir}b_{ij}x_rx_j$$

Ejemplo: Sea $y_i = a_{ij}x_j$, entonces se puede expresar la forma cuadrática $Q = g_{ij}y_ix_j$ en términos de la variable x de la siguiente manera:

$$\Rightarrow \qquad y_i = a_{ir}x_r, \quad y_j = a_{js}x_s$$

$$\Rightarrow \qquad Q = g_{ij}(a_{ir}x_r)(a_{js}x_s) = g_{ij}a_{ir}a_{js}x_rx_s$$

■

Delta de Kronecker: Es una función de dos variables, que vale 1 si son iguales, y 0 si son diferentes. Aniquila los términos no-diagonales es una suma doble:

$$\Rightarrow \qquad \delta_{ij} = \delta^i_j = \delta^{ij} \equiv \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad \textbf{[5.1.3]}$$

Adicionalmente se tiene que: $\delta_{ij} = \delta_{ji} \not\forall\, i,j$.

Ejemplo: Si $n = 3$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \delta_{ij}x_ix_j = {} & 1 \cdot x_1x_1 + 0 \cdot x_1x_2 + 0 \cdot x_1x_3 \\ & + 0 \cdot x_2x_1 + 1 \cdot x_2x_2 + 0 \cdot x_2x_3 \\ & + 0 \cdot x_3x_1 + 0 \cdot x_3x_2 + 1 \cdot x_3x_3 \\ & = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 \end{aligned}$$

■

Así entonces, se puede escribir la forma cuadrática del vector x_i como:

$$\delta_{ij}x_ix_j = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 \qquad \textbf{[5.1.4]}$$

Y adicionalmente, se tiene que: $\delta_{ij}x_ix_j = x_ix_i$ y $\delta^i_r a_{ir}x_i = a_{ij}x_i$.

Álgebra en la convención de suma:

Identidades:	***No-identidades:***
$a_{ij}(x_j + y_j) \equiv a_{ij}x_j + a_{ij}y_j$	$a_{ij}(x_i + y_j) \not\equiv a_{ij}x_i + a_{ij}y_j$
$a_{ij}x_iy_j \equiv a_{ij}y_jx_i$	$a_{ij}x_iy_j \not\equiv a_{ij}y_ix_j$
$a_{ij}x_ix_j \equiv a_{ji}x_ix_j$	$(a_{ij} + a_{ji})x_iy_j \not\equiv 2a_{ij}x_iy_j$
$(a_{ij} + a_{ji})x_{ij} \equiv 2a_{ij}x_{ij}$	
$(a_{ij} - a_{ji})x_{ij} \equiv 0$	

Notación Tensorial: Resulta conveniente revisar las propiedades de las matrices y determinantes ya que los tensores son una extensión de esas formas algebraicas. La mayoría de las propiedades se preservan, aunque algunas tendrán que modificarse para abarcar sistemas de números más complejos y las operaciones del Cálculo, en particular la derivada.

Usualmente trabajamos con matrices de nxm que equivalen a sistemas de n ecuaciones con m incógnitas, pero ¿qué significa un conjunto multidimensional $n\ x\ m\ x\ p$ o de órden superior?, ¿que significa la derivada de una matriz?

Para nuestros propósitos se requiere utilizar matrices multidimensionales, a las que llamaremos tensores y que tendrán la cualidad de que los conjuntos de números ahí contenidos serán independientes de los sistemas de referencia elegidos. Es decir, estarán descritos en coordenadas intrínsecas o generalizadas.

La notación tensorial se aplica tanto a vectores, matrices y a determinantes. En notación ordinaria se escribe: (a_{ij}) para denotar los elementos escalares $a_{ij} \in \mathbb{R}$ que conforman una matriz, donde el subíndice i especifica el renglón y el subíndice j la columna en donde se ubica dicho elemento.

La notación extendida $[a_{ij}]_{nm}$ exhibe adicionalmente, el número total de renglones y columnas con los que cuenta la matriz. Así entonces podemos escribir:

$$[a_{ij}]_{nm} = [a^i_j]_{nm} = [a^{ij}]_{nm} \equiv \begin{bmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_m \end{bmatrix} \qquad \textbf{[5.1.5]}$$

Donde el primer índice o el de arriba denota el renglón y el segundo o el de abajo la columna.

Un vector $n-dimensional$ es un caso particular de una matriz que solo tiene un renglón (*vector renglón*) o una columna (*vector columna*). Así, por ejemplo, $\boldsymbol{v} = [x_{ij}]_{n1}$ tiene componentes reales $x_i = x_{i1}$; y se escribe simplemente como: $\boldsymbol{v} = (x_i)$.

Suma de matrices: es una suma de elementos renglón y columna.

Sean $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{nm} = [a_{ij}]_{nm}$ y $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{nm} = [b_{ij}]_{nm}$ dos matrices del mismo rango (número de renglones y columnas). Entonces,

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = [a_{ij}]_{nm} + [b_{ij}]_{nm} \equiv [a_{ij} + b_{ij}]_{nm} \qquad \textbf{[5.1.6]}$$

Multiplicación por un escalar: permite multiplicar una matriz por un número.

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ un escalar y $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{nm}$ una matriz. Entonces,

$$\lambda \cdot \boldsymbol{A} = \lambda [a_{ij}]_{nm} \equiv [\lambda a_{ij}]_{nm} \qquad \textbf{[5.1.7]}$$

Multiplicación de matrices: Esta operación permite multiplicar dos matrices y obtener como resultado otra matriz.

Sean $A = [a_{ij}]_{nm}$ y $B = [b_{ij}]_{mk}$ dos matrices, donde el número de columnas de la primera coincide con el número de renglones de la segunda.

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = [a_{ij}]_{nm} \cdot [b_{ij}]_{mk} \equiv [a_{ir} b_{rj}]_{nk} \qquad \textbf{[5.1.8]}$$

Análogamente, para índices mixtos se puede escribir:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = [a^i_j]_{nm} \cdot [b^i_j]_{mk} \equiv [a^i_r b^r_j]_{nk} \qquad \textbf{[5.1.9]}$$

Nótese que en ambos casos la suma no se realiza sobre los índices i, j.

Matriz Identidad: Tiene la propiedad de que al multiplicarse por una matriz cualquiera el resultado es la misma matriz.

Es decir, que siendo I la matriz identidad y A cualquier matriz de orden n:

$$\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I} \equiv \boldsymbol{A} \qquad \textbf{[5.1.10]}$$

En términos de la delta de Kronecker, se puede escribir:

$$\boldsymbol{I} \equiv [\delta_{ij}]_{nn} = [\delta^i_j]_{nn} = [\delta^{ij}]_{nn} \qquad \textbf{[5.1.11]}$$

Inversa de una matriz cuadrada: Una matriz cuadrada es aquella que cuenta con el mismo número de renglones y columnas. Se dice que la matriz $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{nn}$ es invertible si existe una matriz $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{nn}$ tal que su producto dé como resultado la identidad; es decir la matriz I.

Así entonces,

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{I} \qquad \textbf{[5.1.12]}$$

Se dice entonces que la matriz $\boldsymbol{B}$ es la inversa de $\boldsymbol{A}$; y se cumple que:

$$a_{ir} b_{rj} = b_{rj} a_{ir} \equiv \delta_{ij}; \quad a^i_r b^r_j = b^r_j a^i_r \equiv \delta^i_j; \quad a^{ir} b^{rj} = b^{rj} a^{ir} \equiv \delta^{ij} \qquad \textbf{[5.1.13]}$$

Transpuesta de una matriz: Para una matriz $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{nm}$ es la matriz cuyos elementos renglón son los elementos columna de $\boldsymbol{A}$ y cuyos elementos columna son los elementos renglón de A. Es decir,

$$\boldsymbol{A}^T = \left[a_{ij}\right]_{nm}^T \equiv \left[a'_{ij}\right]_{mn} \qquad \textbf{[5.1.14]}$$

Donde, $a'_{ij} = a_{ji}$ $\forall$—i, j.

Si además se cumple que $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$; entonces, $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall$—i, j; y se dice que $\boldsymbol{A}$ es *simétrica*.

En el caso en el que $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$, donde $a_{ij} = -a_{ji}$ $\forall$—i, j; se dice que $\boldsymbol{A}$ es *antisimétrica*.

Matriz ortogonal: Cuando la transpuesta de una matriz es igual a su inversa, se dice que es ortogonal.

Es decir,

$$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^T \equiv \boldsymbol{I} \qquad \textbf{[5.1.15]}$$

Símbolo de permutación: Permite denotar los cambios en el orden de los subíndices de los elementos de una matriz y se denota con: $e_{ijk\ldots w}$; con $(i, j, k, \ldots, w) \rightarrow (1,2,3, \ldots, n)$ subíndices.

Además, se tiene que:

$$e_{ijk\ldots w} = 0 \qquad \textbf{[5.1.16]}$$

Si dos índices son repetidos:

$$e_{ijk\ldots w} = (-1)^P \qquad \textbf{[5.1.17]}$$

Donde P es el número de transposiciones o intercambios de índices consecutivos

Determinante de una matriz cuadrada: Es un escalar asociado a una matriz, en su sentido original, el determinante determina la unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones lineales, aunque en la actualidad sus propiedades pueden tener múltiples usos.

Sea $\boldsymbol{A} \equiv \left[a_{ij}\right]_{nn}$,

$$\Rightarrow \qquad det\, \boldsymbol{A} \triangleq |A| = \left|a_{ij}\right| \equiv e_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_n} a_{1 i_1} a_{2 i_2} a_{3 i_3} \ldots\ a_{n i_n} \qquad \textbf{[5.1.18]}$$

Algunas propiedades básicas de los determinantes son las siguientes:

$i)$ $$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BA}| \qquad \textbf{[5.1.19]}$$

$ii)$ $$|\boldsymbol{A}^T| = |\boldsymbol{A}|$$

Expansión de Laplace de un determinante: Sea M_{ij} el determinante de una matriz de orden $n-1$ obtenido a partir de $\boldsymbol{A} \equiv \left[a_{ij}\right]_{nn}$ borrando el renglón i y la columna j; así M_{ij} es el *menor* de a_{ij} en $|\boldsymbol{A}|$.

Se define el cofactor de a_{ij} como el escalar $A_{ij} = (-1)^k M_{ij}$, con $k = i + j$.

Entonces, para $|\boldsymbol{A}|$ se tienen las siguientes expansiones de Laplace:

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1j}A_{1j} = a_{2j}A_{2j} = a_{3j}A_{3j} = \cdots = a_{nj}A_{nj} \quad para\ renglones \qquad [5.1.20]$$

$$|\boldsymbol{A}| = a_{i1}A_{i1} = a_{i2}A_{i2} = a_{i3}A_{i3} = \cdots = a_{in}A_{in} \quad para\ columnas$$

Producto escalar de vectores: Sean $\boldsymbol{u} = (x_i)$ y $\boldsymbol{v} = (y_i)$ dos vectores cualesquiera,

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{v} = x_i y_i \qquad [5.1.21]$$

Debe ser claro que si $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ entonces $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u^2 = \boldsymbol{v}^2$ y si $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ entonces $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

Norma o longitud de un vector: Para cualquier vector $\boldsymbol{u} = (x_i)$ de dimensión n, se tiene:

$$\left|\left|\boldsymbol{u}\right|\right| = \sqrt{u^2} = \sqrt{x_i x_i} \qquad [5.1.22]$$

Ángulo entre vectores: Sean $\boldsymbol{u} = (x_i)$ y $\boldsymbol{v} = (y_i)$ dos vectores cualesquiera de dimensión n, y sea θ el ángulo entre ellos. Entonces,

$$\cos\,\theta \equiv \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\left|\left|\boldsymbol{u}\right|\right|\left|\left|\boldsymbol{v}\right|\right|} = \frac{x_i y_i}{\sqrt{x_j x_j}\,\sqrt{y_k y_k}}; \quad 0 \le \theta \le \pi \qquad [5.1.23]$$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$: Sean $\boldsymbol{u} = (x_i)$ y $\boldsymbol{v} = (y_i)$ dos vectores cualesquiera de dimensión 3. Entonces, en la base estándar $\hat{\boldsymbol{\imath}} \equiv (\delta_{i1})$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}} \equiv (\delta_{i2})$ y $\hat{\boldsymbol{k}} \equiv (\delta_{i3})$,

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \hat{\boldsymbol{k}} \qquad [5.1.24]$$

O en términos de componentes:

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \left(e_{ijk} x_j y_k\right) \qquad [5.1.25]$$

Inversión de Matrices: Existen muchos métodos para encontrar el inverso de una matriz; sin embargo, casi siempre son engorrosos. Sea $A = [a_{ij}]_{nm} \neq 0$ una matriz invertible; es decir, existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$.

Para n pequeña es útil utilizar la siguiente fórmula para encontrar la matriz A^{-1}:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}[A_{ij}]^T_{nm} \qquad \textbf{[5.1.26]}$$

La cual se sigue de la expansión de Laplace.

Ejemplo: Si $n = 2$,

$$\Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Donde, $|\boldsymbol{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

■

Ejemplo: Si $n = 3$,

$$\Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Donde, $A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, $A_{21} = -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$, …

■

5.2 Sistemas Lineales y Transformación de Coordenadas

Cuando realizamos una trasformación simple de coordenadas, podemos trasladar los puntos en un sistema de referencia S a otro del mismo tipoS'; en donde la diferencia entre ambos sistemas puede ser una traslación $(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$ y/o una rotación $(x, y, z) \rightarrow \Lambda(x', y', z')$.

Pero adicionalmente podremos hacer el cambio de un sistema de coordenadas Euclídeo a otras de diferente tipo (NO rectangulares o curvilíneas); por ejemplo, podemos transformar de coordenadas cartesianas (x, y, z) a coordenadas esféricas (r, θ, Φ), cilíndricas (r, θ, z), etc.

En estos casos además de contar con la regla de transformación de cada coordenada de un sistema respecto de las otras coordenadas, será necesario hacer un ajuste métrico que compense la posible diferencia entre las dimensiones unitarias en cada sistema.

Esa corrección no es más que la variación o derivada de cada coordenada de un sistema respecto de todas las coordenadas del otro sistema. Este conjunto de números constituye la conocida Matriz Jacobiana, y contiene la información geométrica básica de las trasformaciones.

Sistema de ecuaciones lineales: pueden expresarse en forma matricial para facilitar su resolución. Así, por ejemplo, el sistema:

$$3x - 4y = 2$$
$$-5x + 8y = 7$$

Puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Y en general, para un sistema de $n \times m$ ecuaciones descrito por la ecuación:

$$a_{ij} x_j = b_i; \qquad 1 \leq i \leq n \qquad \textbf{[5.2.1]}$$

En forma matricial, se puede escribir como:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \qquad \textbf{[5.2.2]}$$

Donde, $\boldsymbol{A} \equiv \left[a_{ij}\right]_{nm}$, $\boldsymbol{x} \equiv (x_i)$ y $\boldsymbol{b} \equiv (b_i)$.

En el caso en el que $n = m$, si A es invertible, la solución viene dada por:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \qquad \textbf{[5.2.3]}$$

Forma cuadrática: Sea Q un polinomio de segundo orden homogéneo en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Entonces, se puede escribir:

$$Q \equiv a_{ij} x_i x_j = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \qquad \textbf{[5.2.4]}$$

Donde $\boldsymbol{x}^T$ es el vector transpuesto de $\boldsymbol{x}$ y $A = \left[a_{ij}\right]_{nm}$.

Ejemplo:

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} a_{1j} x_j \\ a_{2j} x_j \\ a_{3j} x_j \end{bmatrix}$$
$$= \left[x_i \left(a_{ij} x_j\right)\right] = a_{ij} x_i x_j$$

■

NOTA: La matriz $\boldsymbol{A}$ que produce la forma cuadrática no es única, de hecho,

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T) \qquad \textbf{[5.2.5]}$$

Puede sustituirse por $\boldsymbol{A}$. La matriz de una forma cuadrática siempre es simétrica.

Ejemplo: Expresar la ecuación cuadrática:

$$3x^2 + y^2 - 2z^2 - 5xy - 6yz = 10$$

Usando una matriz simétrica.

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

La matriz simétrica equivalente se obtiene reemplazando los elementos no-diagonales por la mitad de la suma de cada elemento y su elemento imagen respecto de la diagonal.

$$\Rightarrow \qquad [x \quad y \quad z] \begin{bmatrix} 3 & -5/2 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ 0 & -5/2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 10$$

■

Coordenadas Rectangulares (cartesianas):

Sean $\boldsymbol{P} = (x^1, \dots, x^n)$ y $\boldsymbol{Q} = (y^1, \dots, y^n)$ vectores pertenecientes a $\mathbb{R}^n$, entonces se puede escribir:

$$d(\boldsymbol{PQ}) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \cdots (x^n - y^n)^2} \equiv \sqrt{\delta_{ij}\Delta x^i \Delta x^i} \qquad \textbf{[5.2.6]}$$

Donde $\Delta x^i = x^i - y^i$. Esta fórmula, que corresponde al *Teorema de Pitágoras* $n - dimensional$, es invariante ante cambios de coordenadas rectangulares, también llamadas *isométricas*.

Los sistemas donde una transformación de coordenadas se exprese de modo que $\left(\hat{x}^i\right) \equiv a_r^i x^r$, donde $\left(a_r^i\right)$ es tal que $a_i^r a_j^r \equiv \delta_{ij}$ describen vectores en coordenadas rectangulares.

Coordenadas curvilíneas: Sea U una región de $\mathbb{R}^n$ con dos sistemas coordenados conectados por ecuaciones de la forma:

$$\boldsymbol{\mathcal{T}}: \hat{\boldsymbol{x}}^i = \hat{\boldsymbol{x}}^i(x^1, \dots, x^n); \quad 1 \le i \le n \qquad \textbf{[5.2.7]}$$

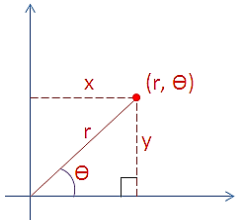
Entonces, para cada i la función de transformación $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ tiene un mapeo. La región $\boldsymbol{U}\left(\widehat{\boldsymbol{U}}\right)$ de clase (C^2); es decir que sus segundas derivadas son continuas, si $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ es biyectiva.

Las más comunes de estas transformaciones de coordenadas afines son:

i) Coordenadas Polares:

Sean $(\hat{x}^1, \hat{x}^2) = (x, y)$ y $(x^1, x^2) = (r, \theta)$; $r > 0$.

Así que:



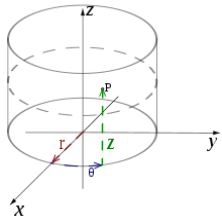
$$\boldsymbol{\mathcal{T}}: \begin{cases} \hat{x}^1 = x^1 \cos x^2 \\ \hat{x}^2 = x^1 \operatorname{sen} x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \textbf{[5.2.8]}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}}: \begin{cases} x^1 = \sqrt{(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2} \\ x^2 = tan^{-1}(\hat{x}^2/\hat{x}^1)\,; \;\; Cuadr.I \text{ y } IV \end{cases}$$

ii) Coordenadas Cilíndricas:

Sean $(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3) = (x, y, z)$ y $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, z)$; $r > 0$.

Así que:



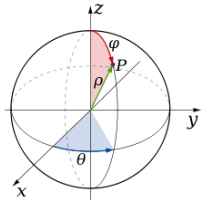
$$\boldsymbol{\mathcal{T}}: \begin{cases} \hat{x}^1 = x^1 \cos x^2 \\ \hat{x}^2 = x^1 \operatorname{sen} x^2 \\ \hat{x}^3 = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \textbf{[5.2.9]}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}}: \begin{cases} x^1 = \sqrt{(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2} \\ x^2 = tan^{-1}(\hat{x}^2/\hat{x}^1)\,; \;\; Cuadrantes \; I \text{ y } IV \\ x^3 = \hat{x}^3 \end{cases}$$

iii) Coordenadas Esféricas:

Sean $(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3) = (x, y, z)$ y $(x^1, x^2, x^3) = (\rho, \varphi, \theta)$; $\rho > 0$.

Así que:



$$\boldsymbol{\mathcal{T}}: \begin{cases} \hat{x}^1 = x^1 \operatorname{sen} x^2 \cos x^3 \\ \hat{x}^2 = x^1 \operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen} x^3 \\ \hat{x}^3 = x^1 \cos x^2 \end{cases} \qquad \textbf{[5.2.10]}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{T}}}: \begin{cases} x^1 = \sqrt{(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 + (\hat{x}^3)^2} \\ x^2 = \cos^{-1}\left(\hat{x}^3/\sqrt{(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 + (\hat{x}^3)^2}\right) \\ x^3 = tan^{-1}(\hat{x}^2/\hat{x}^1) \end{cases}$$

Si, además, $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ es una transformación lineal, entonces la transformación de coordenadas es *afín*; es decir, es una transformación lineal seguida de una traslación: $\boldsymbol{x \rightarrow Ax + b}$.

El Jacobiano: Sea $\boldsymbol{J}$ la matriz *jacoviana* de las derivadas parciales de:

$\hat{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{i}} = \hat{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{i}}(x^1, \dots, x^n)$ para todas las $i, j = 1, \dots, n$ con respecto de x^j,

es decir:

$$\boldsymbol{J} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \hat{x}^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{x}^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \hat{x}^n}{\partial x^n} \end{bmatrix} \qquad \textbf{[5.2.11]}$$

Entonces, el determinante, $\jmath \equiv \det \boldsymbol{J}$, de la matriz $\boldsymbol{J}$ jacobiana se define como el *jacobiano* de la transformación $\boldsymbol{\mathcal{T}}$. Además $\hat{\boldsymbol{J}}$ será la jacobiana de la transformación $\hat{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$; y ya que es el inverso de $\boldsymbol{J}$ se tiene que:

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{J}\,\hat{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{I} \qquad \textbf{[5.2.12]}$$

O bien,

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^j} = \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^r}\frac{\partial \hat{x}^r}{\partial x^j} \equiv \delta^i_j; \qquad \therefore \quad \hat{\jmath} = \frac{1}{\jmath} \qquad \textbf{[5.2.13]}$$

5.3 Tensores de 1*er* Orden y Superior

Los tensores son generalizaciones de los conceptos de escalar, vector y matriz; algunos son fáciles, pero otros pueden ser muy complejos.

Así como no podemos leer un escalar con demasiados dígitos y tampoco podemos dibujar un vector de n coordenadas o escribir una matriz de $n\ x\ m\ x\ p$. Así los tensores, que en realidad no son otra cosa que matrices multidimensionales, no pueden visualizarse más allá de orden 3.

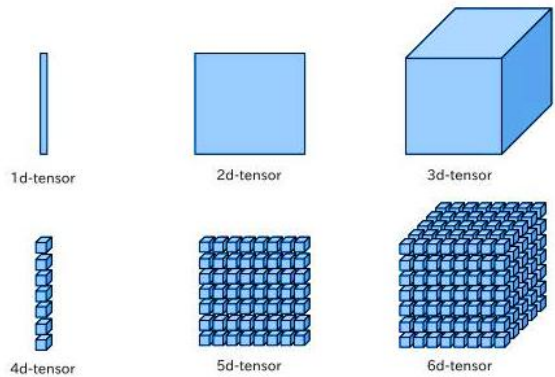


Figura 5.3.1: Matrices multidimensionales o Tensores.

Existen tensores de cualquier orden, pero en relatividad solo usaremos tensores de hasta orden 4, y aunque estos no son muy complicados tampoco son fáciles de visualizar.

Así que lo que se propone es: *ir con pies de plomo* sobre las definiciones que se presentan a continuación.

Cualquier duda debe quedar resuelta con la aplicación estricta de las definiciones tal y como se presentan.

Tensores de 1*er* Orden: Sea $\boldsymbol{V} = (v^i)$ un campo vectorial $\in \mathbb{R}^n$, donde para cada i se tiene que $v^i = v^i(\hat{\boldsymbol{x}})$ es un campo escalar. Entonces, se pueden expresar las $v^1, \dots, v^n$ de $\boldsymbol{V}$ con las transformaciones $\boldsymbol{T}^1, \dots, \boldsymbol{T}^n$ en el sistema $(\hat{\boldsymbol{x}}^i)$.

El campo vectorial $\boldsymbol{V}$ es un vector o *tensor contravariante* de orden 1, con componentes (T^i) y $(\hat{T}^i)$ relativos a los sistemas de coordenadas (x^i) y $(\hat{x}^i)$; y se satisface que el vector contravariante $\hat{T}^i$ cumple con el hecho de que:

$$\hat{T}^i = T^r \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r}; \quad 1 \le i \le n \qquad \textbf{[5.3.1]}$$

Ejemplo: Sea $\mathcal{C}$ una curva parametrizada en el sistema (x^i) caracterizada por $(x^i) = x^i(t)$; en $(a \le t \le b)$.

Entonces, el campo de vectores tangentes $\boldsymbol{T} = (T^i)$ se define como:

$$T^i = \frac{\partial x^i}{\partial t}$$

Cambiando al sistema de coordenadas $(\hat{x}^i)$; con $\hat{\boldsymbol{x}}^i = \hat{\boldsymbol{x}}^i(t) = \hat{\boldsymbol{x}}^i\big(x^1(t), \dots, x^n(t)\big)$; $(a \le t \le b)$.

En el sistema $(\hat{x}^i)$ el vector tangente tiene componentes:

$$\hat{T}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial t}$$

Y con la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial t} = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial t},$$

O bien,

$$\hat{T}^i = T^r \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r}$$

■

Ejemplo: Sea $F(\hat{\boldsymbol{x}})$ un campo escalar diferenciable en el sistema $(x^i) \in \mathbb{R}^n$.

Entonces,

$$\boldsymbol{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x^n}\right)$$

O bien,

$$\widehat{\boldsymbol{\nabla}} \hat{F} = \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{x}^i}\right); donde, \hat{F}(\hat{\boldsymbol{x}}) = F \circ \boldsymbol{x}(\hat{\boldsymbol{x}})$$

Entonces, por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{x}^i} = \frac{\partial F}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^i}$$

Que es equivalente a:

$$T^i = \frac{\partial F}{\partial x^i} \quad \text{y} \quad \hat{T}_i = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{x}^i}$$

Por lo tanto: el gradiente de una función arbitraria es un vector *covariante*.

■

NOTA: Los tensores de $1er$ orden, covariantes (con índice abajo) o contravariantes (con índice arriba) son simplemente vectores.

Invariantes: Son aquellos objetos, funciones, ecuaciones, fórmulas, etc., que tienen un valor que es independiente del sistema de coordenadas al que puedan estar referidos.

"El producto de un vector covariante y uno contravariante siempre es invariante".

Teorema: Sean T_i y S^i las componentes covariantes y contravariantes de un vector. Entonces, su producto interno $E = T_r S^r$ está definido en ambos sistemas coordenadas y es invariante.

Además, se cumple que: $E = \hat{E}$, de modo que $T_r S^r = \hat{T}_r \hat{S}^r$

$$\Rightarrow \qquad \hat{T}_r\left(S^j \frac{\partial \hat{x}^r}{\partial x^j}\right) = T_j S^j$$

O bien,

$$\left(T_j - \hat{T}_r \frac{\partial \hat{x}^r}{\partial x^j}\right) S^j = 0$$

Ya que:

$$T_k - \hat{T}_i \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^k}$$

■

Ejemplo: El vector tangente a la curva $\mathcal{C}$, $(S^i) = (dx^i/dt)$ y la función gradiente de una función $(T_i) = (\partial F/\partial x^i)$ son vectores covariantes y contravariantes. Entonces se puede escribir:

$$E = S^r T_r = \frac{\partial F}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t}$$

y,

$$\frac{d}{dt}\left[F \circ \left(\boldsymbol{x}^i(t)\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[\hat{F}(t)\right]$$

Es independiente del sistema de coordenadas (x^i), y también, $\partial\hat{F}/\partial t$ es invariante ante el cambio de coordenadas.

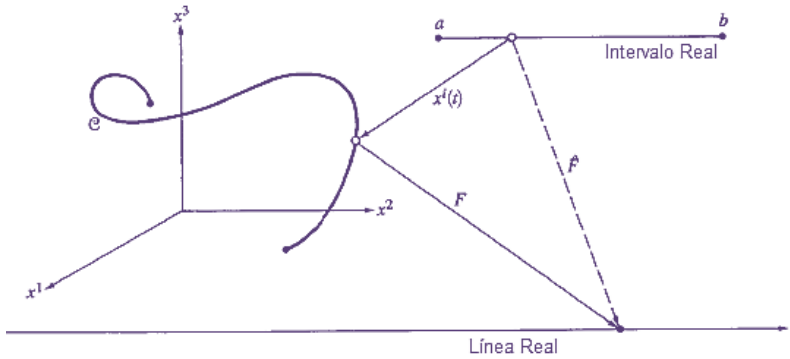


Figura 5.3.2: Composición $\widehat{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F} \circ \left(\boldsymbol{x}^i(t)\right) \in \mathbb{R}^n$.

■

Tensores de 2° Orden: Sea $\boldsymbol{V}_{nm} = (v^{ij})$ un *campo matricial*, donde se tienen los escalares $v^{ij}(\hat{\boldsymbol{x}})$ con $\hat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$.

Definición: La matriz $\boldsymbol{V}$ es un tensor contravariante de 2° orden si sus componentes (T^{ij}) y $(\hat{T}^{ij})$ en los sistemas coordenados relacionados $(\boldsymbol{x}^i)$ y $(\hat{\boldsymbol{x}}^i)$ respectivamente, cumplen que:

$$\hat{T}^{ij} = T^{rs}\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^s}; \quad 1 \le i \le n, \;\; 1 \le j \le n. \qquad \textbf{[5.3.2]}$$

Definición: La matriz $\boldsymbol{V}$ es un tensor covariante de 2° orden si se cumple que:

$$\hat{T}_{ij} = T_{rs}\frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^j}; \quad 1 \le i \le n, \;\; 1 \le j \le n. \qquad \textbf{[5.3.3]}$$

Teorema: Sea $(\boldsymbol{T}_{ij})$ es un tensor covariante de 2° orden. Si la matriz $[T_{ij}]_{nn}$ es invertible y tiene matriz inversa $[T^{ij}]_{nn}$; entonces, $(\boldsymbol{T}^{ij})$ es un vector contravariante de 2° orden. ■

Definición: La matriz $\boldsymbol{V}$ es un *tensor mixto* de 2° orden, contravariante de $1er$ orden y covariante de $1er$ orden, si sus componentes (T_j^i) y $(\hat{T}_j^i)$ en $(\boldsymbol{x}^i)$ y $(\hat{\boldsymbol{x}}^i)$ obedecen que:

$$\hat{T}_j^i = T_s^r \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^j}; \quad 1 \le i \le n, \;\; 1 \le j \le n. \qquad \textbf{[5.3.4]}$$

Tensores de Orden Arbitrario: Sea $\boldsymbol{V}$ un campo vectorial generalizado que es un arreglo de n^m $(m = p + q)$ de campos escalares, estando $\left(V_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p}\right)$ definido en una región $\in \mathbb{R}^n$. Entonces, el tensor $\boldsymbol{V}$ es contravariante de orden p y covariante de orden q.

Así, $\left(T_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p}\right)$ denota un conjunto de funciones componentes en varios sistemas coordenados y se cumple que:

$$\hat{T}_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} = T_{s_1,\dots,s_q}^{r_1,\dots,r_p} \frac{\partial \hat{x}^{i_1}}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial \hat{x}^{i_p}}{\partial x^{r_q}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \hat{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_q}}{\partial \hat{x}^{j_q}}. \qquad \textbf{[5.3.5]}$$

Tensor de Esfuerzo: Supóngase un cubo unitario que se encuentra en equilibrio con fuerzas aplicadas a 3 de sus caras.

Cada cara tiene un área unitaria, así que las fuerzas son aplicadas por unidad de área, y son llamadas *esfuerzos* o *tensiones*, según sus componentes normales u oblicuas a cada una de las caras

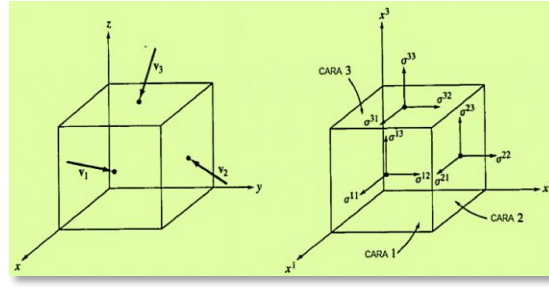


Figura 5.3.2: Fuerzas aplicadas a las caras de un cubo.

Usando la base estándar, $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3$; se puede escribir:

$$\boldsymbol{v}_1 = \sigma^{1s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s, \quad \boldsymbol{v}_2 = \sigma^{2s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s, \quad \boldsymbol{v}_3 = \sigma^{3s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s \qquad \textbf{[5.3.6]}$$

Tensión en una sección del cubo: para calcular la tensión $\boldsymbol{F}$ que es transmitida a una sección plana con normal unitaria $\hat{\boldsymbol{n}}$ se considera que:

Si A es el área de la sección transversal, estando el cubo en equilibrio la tensión en x^1x^2, x^1x^3, x^2x^3 está dada por las fuerzas $-\boldsymbol{v}_1, -\boldsymbol{v}_2, -\boldsymbol{v}_3$. Así las fuerzas sobre las mismas bases son: $\boldsymbol{B}_1(-\boldsymbol{v}_3)$, $\boldsymbol{B}_2(-\boldsymbol{v}_2)$, $\boldsymbol{B}_3(-\boldsymbol{v}_1)$.

Donde las $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ y $\boldsymbol{B}_3$ son las proyecciones de A en los planos x^1x^2, x^1x^3 y x^2x^3 respectivamente.

De modo que:

$$\boldsymbol{B}_1 = A\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \;\Rightarrow\; \frac{\boldsymbol{B}_1}{A} = \hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

$$\boldsymbol{B}_2 = A\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{e}}_2 \;\Rightarrow\; \frac{\boldsymbol{B}_2}{A} = \hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{e}}_2$$

$$\boldsymbol{B}_3 = A\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{e}}_1 \;\Rightarrow\; \frac{\boldsymbol{B}_3}{A} = \hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{e}}_1$$

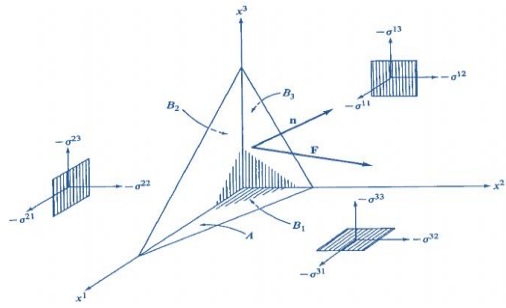


Figura 5.3.3: Proyecciones del área A.

Así entonces,

$$A\boldsymbol{F} + B_1(-\boldsymbol{v}_3) + B_2(-\boldsymbol{v}_2) + B_3(-\boldsymbol{v}_3) = 0 \qquad \textbf{[5.3.7]}$$

Resolviendo para $\boldsymbol{F}$, se tiene que:

$$\boldsymbol{F} = \frac{B_1}{A}\boldsymbol{v}_3 + \frac{B_2}{A}\boldsymbol{v}_2 + \frac{B_3}{A}\boldsymbol{v}_3 \qquad \textbf{[5.3.8]}$$

Sustituyendo las expresiones para las B_i y v_i, se obtiene finalmente:

$$\boldsymbol{F} = \sigma^{rs}(\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{e}}_r)\hat{\boldsymbol{e}}_s \qquad \textbf{[5.3.9]}$$

Cambio de coordenadas: Al cambiar la base $\mathbb{R}^3$ por la transformación $\hat{\boldsymbol{e}}_i = a_i^j\hat{\boldsymbol{f}}_j$ con $a_i^j \neq 0$, en términos de coordenadas se puede escribir:

$$x^i\hat{\boldsymbol{e}}_i = x^i\left(a_i^j\hat{\boldsymbol{f}}_j\right) = \left(a_i^j x^i\right)\hat{\boldsymbol{f}}_j = \hat{x}^j\hat{\boldsymbol{f}}_j \qquad \textbf{[5.3.10]}$$

Donde en las nuevas coordenadas $\hat{\boldsymbol{x}}^j = a_j^i x^i$ y $\partial\hat{x}^j/\partial x^i = a_i^j$.

Sustituyendo $\hat{\boldsymbol{e}}_r = a_r^i\hat{\boldsymbol{f}}_i$ en la ecuación **[5.3.9]** las componentes de la tensión en el nuevo sistema de coordenadas se obtienen como:

$$\boldsymbol{F} = \sigma^{rs}\left[\hat{\boldsymbol{n}}\left(a_r^i\hat{\boldsymbol{f}}_i\right)\right]a_s^j\hat{\boldsymbol{f}}_j = \sigma^{rs}a_r^i a_s^j\left(\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{f}}_i\right)\hat{\boldsymbol{f}}_j \equiv \hat{\sigma}^{ij}\left(\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{f}}_i\right)\hat{\boldsymbol{f}}_j \qquad \textbf{[5.3.11]}$$

Con $\hat{\sigma}^{ij} = \sigma^{rs}a_r^i a_s^j$ que es un tensor de 2° orden contravariante.

Tensores Afines: Son los tensores que admiten cambios de coordenadas lineales,

$$\boldsymbol{\mathcal{T}}: \hat{x}^i = a^i_j x^j; \left|a^i_j\right| \neq 0 \qquad \textbf{[5.3.11]}$$

Si además $\left(a^i_j\right)$ es un sistema ortonormal y la transformación $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ preserva distancias se llaman *tensores cartesianos*.

Los tensores afines establecen el cambio de coordenadas de un sistema $\left(\boldsymbol{x}^i\right)$ a otro $\left(\hat{\boldsymbol{x}}^i\right)$ que tienen ejes **oblicuos** con las matrices jacobianas de $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ y $\hat{\boldsymbol{\mathcal{T}}}$:

$$\boldsymbol{J} = \left[\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}\right]_{nn} \equiv \left[a^i_r\right]_{nn} \quad y \quad \hat{\boldsymbol{J}} = \left[\frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j}\right]_{nn} \equiv \left[b^i_r\right]_{nn} \qquad \textbf{[5.3.12]}$$

Leyes de Transformación:

Contravariante:

$$\hat{\boldsymbol{T}}^i = a^i_r \boldsymbol{T}^r, \quad \hat{\boldsymbol{T}}^{ij} = a^i_r a^j_s \boldsymbol{T}^{rs}, \quad \hat{\boldsymbol{T}}^{ijk} = a^i_r a^j_s a^k_t \boldsymbol{T}^{rst}, \ldots \qquad \textbf{[5.3.13]}$$

Covariante:

$$\hat{\boldsymbol{T}}_i = b^r_i \boldsymbol{T}_r, \quad \hat{\boldsymbol{T}}_{ij} = b^r_i b^s_j \boldsymbol{T}_{rs}, \quad \hat{\boldsymbol{T}}_{ijk} = b^r_i b^s_j b^t_k \boldsymbol{T}_{rst}, \ldots \qquad \textbf{[5.3.14]}$$

Mixtos:

$$\hat{\boldsymbol{T}}^i_j = a^i_r b^s_j \boldsymbol{T}^r_s, \quad \hat{\boldsymbol{T}}^i_{jk} = a^i_r b^s_j b^t_k \boldsymbol{T}^r_s, \ldots \qquad \textbf{[5.3.15]}$$

Si además las transformaciones son cartesianas; es decir, que están restringidas a sistemas ortogonales; además se tiene que $\boldsymbol{J}^{-1} = \boldsymbol{J}^T$; o bien, $b^i_j = a^j_i$ con $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. De modo que las reglas de transformación anteriores toman la forma:

Contravariante:

$$\hat{\boldsymbol{T}}^i = a^i_r \boldsymbol{T}^r, \quad \hat{\boldsymbol{T}}^{ij} = a^i_r a^j_s \boldsymbol{T}^{rs}, \ldots \qquad \textbf{[5.3.16]}$$

Covariante:

$$\hat{\boldsymbol{T}}_i = a^i_r \boldsymbol{T}_r, \quad \hat{\boldsymbol{T}}_{ij} = a^i_r a^j_s \boldsymbol{T}_{rs}, \ldots \qquad \textbf{[5.3.17]}$$

Mixtos:

$$\hat{\boldsymbol{T}}^i_j = a^i_r a^s_j \boldsymbol{T}^r_s, \ldots \qquad \textbf{[5.3.18]}$$

De modo que en esta forma los comportamientos contravariante y covariante no se distinguen por lo que todos los tensores cartesianos se denotan de la misma manera, con subíndices.

Así los cambios de coordenadas se expresan como: $\hat{\boldsymbol{x}}_i = a_{ij} \boldsymbol{x}_j$ o bien, $\boldsymbol{x}_i = a_{ji} \hat{\boldsymbol{x}}_j$ y las leyes de tensores, : $\hat{\boldsymbol{T}}_i = a_{ir} \boldsymbol{T}_r$, $\hat{\boldsymbol{T}}_{ij} = a_{ir} a_{js} \boldsymbol{T}_{rs}$, etc.

5.4 Operaciones Tensoriales

Entonces, así como usamos las transformaciones de Lorentz para llevar nuestras cantidades a otros sistemas de referencia, ahora queremos generalizar la transformación a espacios curvos. Familiarizados con la notación y propiedades de los tensores veremos que son adecuados para nuestros propósitos.

Una vez que tenemos en claro cómo se puede escribir un tensor *por definición*, ya sea de 1er orden o superior; sea covariante, contravariante o mixto, las operaciones tensoriales resultan bastante fáciles (aunque pueden ser engorrosas).

Para poder hacer la prueba de cada una de las propiedades operacionales igualmente es necesario remitirse siempre a la aplicación de las definiciones, identificando los términos que se pueden anular o agrupar para factorizar y finalmente simplificar para obtener el resultado.

Desde luego que en la práctica se da por sentado el contenido de una operación y simplemente se escribe su solución.

Operaciones fundamentales: De manera sintética se tienen las siguientes operaciones:

1. **Adición:** $\boldsymbol{A}_q^{mp} + \boldsymbol{B}_q^{mp} = \boldsymbol{C}_q^{mp}$.
2. **Sustracción:** $\boldsymbol{A}_q^{mp} - \boldsymbol{B}_q^{mp} = \boldsymbol{D}_q^{mp}$.
3. **Producto Externo:** $\boldsymbol{A}_q^{pr}\boldsymbol{B}_s^{m} = \boldsymbol{C}_{qs}^{prm}$.

   En general no siempre un tensor se puede expresar como el producto de otros 2.

   Es asociativo y distributivo, pero no siempre es conmutativo.
4. **Contracción:** $\boldsymbol{A}_{qs}^{mpr}$; $r = s \implies \boldsymbol{A}_{qs}^{mps} = \boldsymbol{B}_q^{mp}$.

   Si ahora, $p = q \implies \boldsymbol{B}_q^{mq} = \boldsymbol{C}^m$, que es un vector de la forma: $x_i = g_{ij}x^j$.
5. **Producto Interno:** $\boldsymbol{A}_q^{mp}\boldsymbol{B}_{st}^{q} = \boldsymbol{C}_{st}^{mp}$.

   Es un producto externo seguido de una contracción.

■

Ahora bien, en general, sean los tensores:

$$\boldsymbol{S} = \left(S_{j_1,\ldots,j_q}^{i_1,\ldots,i_p}\right) \quad y \quad \boldsymbol{T} = \left(T_{l_1,\ldots,l_s}^{k_1,\ldots,k_r}\right) \qquad [5.4.1]$$

Sumas y combinaciones lineales:

Siendo $p = r$ y $q = s$ se tiene que:

$$\boldsymbol{S} + \boldsymbol{T} \equiv \left(S^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} + T^{k_1,\dots,k_r}_{l_1,\dots,l_s}\right) \qquad \textbf{[5.4.2]}$$

Así que para $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \dots, \boldsymbol{T}_\mu$ tensores del mismo tipo y orden, y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu \in \mathbb{R}$,

$$\Rightarrow \qquad \lambda_1\boldsymbol{T}_1 + \lambda_2\boldsymbol{T}_2 + \cdots + \lambda_\mu\boldsymbol{T}_\mu \qquad \textbf{[5.4.3]}$$

Es un tensor del mismo tipo y orden.

Producto Exterior:

$$[\boldsymbol{ST}] \equiv \left(S^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} \cdot T^{k_1,\dots,k_r}_{l_1,\dots,l_s}\right) \qquad \textbf{[5.4.4]}$$

Es un tensor de orden $m = p + q + r + s$, contravariante de orden $p + r$ y covariante de orden $q + s$.

Además, se cumple que $[\boldsymbol{ST}] \equiv [\boldsymbol{TS}]$.

Ejemplo: Sean $\boldsymbol{S} = \left(S^i_j\right)$ y $\boldsymbol{T} = (T_k)$, $\quad \Rightarrow \quad [\boldsymbol{ST}] \equiv \left(S^i_j \cdot T_k\right) = \left(P^i_{jk}\right)$

De modo que se cumple que (por definición):

$$\hat{P}^i_{jk} = \hat{S}^i_j \hat{T}_k = \left(S^r_s \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^j}\right)\left(T_n \frac{\partial x^n}{\partial \hat{x}^k}\right) = P^r_{su}\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^j}\frac{\partial x^n}{\partial \hat{x}^k}$$

■

Producto Interior:

Requiere que sean iguales el índice superior de un tensor contravariante y el subíndice de uno covariante, y se realizan las sumas y los productos de los índices repetidos. Los tensores contravariantes y covariantes se cancelan anulando el orden de ambos tensores. Sea, $i_\propto = u = l_\beta$, entonces el producto interno de estos subíndices es:

$$\boldsymbol{ST} \equiv \left(S^{i_1,\dots,u,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q}\, T^{k_1,\dots,k_r}_{l_1,\dots,u,\dots,l_s}\right) \qquad [5.4.5]$$

Entonces, existen $ps + rq$ productos internos de $\boldsymbol{ST}$ y $\boldsymbol{TS}$ que en general no son iguales, cada uno será un tensor de orden $m = p + q + r + s - 2$.

Ejemplo: Sean $\left(T_{ij}\right)$ y $\left(T^{ij}\right)$,

$$\Rightarrow \qquad T^{iu}T_{uj} \equiv \delta^i_j$$

Es un tensor de segundo orden.

■

Ejemplo: Si $\boldsymbol{S}$ es un tensor contravariante y $\boldsymbol{T}$ es covariante,

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{ST} \equiv S^i T_i$$

Es invariante ya que $\boldsymbol{ST}$ es de orden $m+p+q+r+s-2 = 1+0+0+1-2 = 0$. Como invariante se dice que es un tensor de orden 0.

■

Ejemplo: Sean $\boldsymbol{S} = \left(S^{ij}\right)$ y $\boldsymbol{T} = (T_{klm})$,

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{U} = \left(U^j_{km}\right) \equiv \left(S^{uj} \cdot T_{kum}\right)$$

Entonces se tiene (por definición):

$$\widehat{U}^j_{km} = \left(S^{pr}\frac{\partial \hat{x}^u}{\partial x^p}\frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^r}\right)\left(T_{sqt}\frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^k}\frac{\partial x^q}{\partial \hat{x}^u}\frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^m}\right)$$

$$= S^{pr}T_{sqt}\left(\frac{\partial \hat{x}^u}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \hat{x}^u}\right)\frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^m}$$

$$= S^{pr}T_{sqt}\delta^q_p\frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^m} = S^{pr}T_{spt}\frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^m} \equiv U^r_{st}\frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^m}$$

De modo que $\boldsymbol{U}$ es un tensor de orden 3, contravariante de orden 1 y covariante de orden 2.

■

Contracción:

Esta operación también reduce índices. En el tensor $\boldsymbol{S}$ se fija $i_\propto = u = j_\beta$ y se suma sobre u:

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{S'} = \left(S^{i_1,\ldots,u,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,u,\ldots,j_q}\right) \qquad \textbf{[5.4.6]}$$

Se llama contracción de $\boldsymbol{S}$, ya que contrae los índices $i_\propto$ y j_β. $\boldsymbol{S'}$ es contravariante de orden $p-1$ y covariante de orden $q-1$.

Por ejemplo, un tensor $(1,1)$ como T^i_j puede ser contraído a un escalar a través de T^i_i; donde el convenio de suma de Einstein es empleado.

Cuando el tensor $(1,1)$ se interpreta como un mapeo lineal, esta operación es conocida como la traza. En general permite descomponer un tensor en una combinación lineal de tensores más simples.

Operaciones combinadas:

Se pueden obtener tensores aplicando las operaciones anteriores de manera combinada.

Por ejemplo, se puede hacer un producto exterior y al resultado aplicarle un producto interior con un tercero; o bien, contraer uno o varios pares de índices antes o después de sacar un producto.

Así pues, un producto interno es como realizar una contracción sobre el producto externo.

Ejemplo:

Sean $\boldsymbol{S} = \left(S_k^{ij}\right)$, $\boldsymbol{T} = \left(T_{pq}\right) \Longrightarrow$ Producto Interno $\rightarrow \boldsymbol{ST} = \left(S_k^{iu} \cdot T_{uq}\right) = [\boldsymbol{ST}]'$

$$[\boldsymbol{ST}] = \left(S_k^{ij} T_{pq}\right)$$

■

Propiedades:

1. Sea $\boldsymbol{T} = \left(T_{ij}\right)$ un tensor definido en el sistema $\left(\boldsymbol{x}^i\right)$, entonces si $\boldsymbol{T}$ es nulo se cumple que:

$$\hat{T}_{ij} = T_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^j} \equiv 0$$

   $\therefore \boldsymbol{T} = 0$ en todos los sistemas de coordenadas.

2. Si para $\left(T_{ij}\right)$ el $\det \boldsymbol{T} = 0$ en un sistema de coordenadas, entonces $\det \boldsymbol{T} = 0$ en todos los sistemas de coordenadas.

3. Un tensor $\boldsymbol{T}$ es invertible en un sistema de coordenadas lo es en todos los sistemas de coordenadas.

4. Un tensor $\boldsymbol{T}$ de 2° orden estrictamente covariante o contravariante que es simétrico en un sistema de coordenadas lo es en todos los sistemas de coordenadas.

5.5 El Tensor Métrico

Hemos definido los tensores de primer orden y superior, (el orden de los tensores se refiere al número de índices o de elementos de una base vectorial necesarios para referirse a sus componentes).

Estos tensores los hemos asociado a transformaciones para el cambio de coordenadas de vectores $\boldsymbol{x}$ con la intención de ir de un sistema S a otro S' (transformaciones covariantes) y también realizar el cambio de coordenadas de vuelta, de S' a S (transformaciones contravariantes).

Se puede demostrar que las coordenadas curvilíneas tienen factores de escala (*hi*) respecto de las componentes en los espacios Euclídeos.

Ahora veremos que si los espacios son curvos tendrán una métrica que se expresa en su Tensor Métrico asociado y que las líneas como lugares geométricos de mínima distancia entre dos puntos dejarán de ser rectas para convertirse en curvas (Geodésicas).

Con estos elementos, los tensores como transformaciones de coordenadas y la métrica asociada estaremos en condiciones de plantear nuestras ecuaciones de movimiento en espacios curvados; es decir de abordar la formulación de la Relatividad General.

El Tensor Métrico, permite establecer el concepto de distancia en cualquier sistema de coordenadas admisible, sea cartesiano o no.

Y extiende el *Teorema de Pitágoras* al concepto de curva Geodésica que se define como la línea de mínima longitud que une dos puntos en una superficie dada.

Más generalmente, se puede hablar de geodésicas en "espacios curvados" de dimensión superior llamados variedades riemannianas en donde, si el espacio contiene una métrica natural, entonces las geodésicas son (localmente) la ruta más corta entre dos puntos en el espacio.

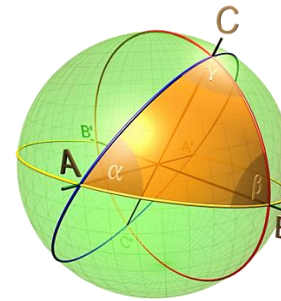


Figura 5.5.1: Geodésicas en una esfera.

Un ejemplo físico, de variedad semiriemanniana es el que aparece en la Relatividad General que considera que el espacio-tiempo se deforma en torno a la masa en todas direcciones. Así que, las trayectorias de movimiento están constreñidas a geodésicas inmersas en superficies curvadas; lo mismo para una partícula sea un fotón, un bosón, un fermión, etc. o para un conjunto grande de ellas como puede ser un planeta o una estrella.

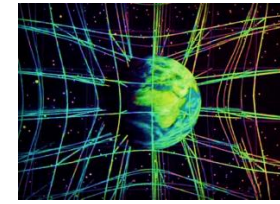


Figura 5.5.2: Espacio-tiempo curvo.

Longitud de Arco: En un espacio euclidiano la expresión clásica para la longitud de arco en varios sistemas de coordenadas es:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left| g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right|}\, dt \qquad [5.5.1]$$

Donde $g_{ij} = g_{ij}(x^1, \dots, x^n) = g_{ij}$ son funciones de las coordenadas y la longitud de arco L de la curva $x^i = x^i(t)$ para $1 \leq i \leq n$ y $a \leq t \leq b$.

Ejemplo: Para $\mathbb{R}^3$, (x^1, x^2, x^3) se tiene que:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left|\delta_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right|}\, dt$$

Aquí, $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Y en forma diferencial:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j$$

O bien, más en general:

$$\pm ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

■

Métrica Euclídea: Es una métrica arbitraria definida sobre un espacio en el que el tensor de curvatura es idénticamente nulo en todo el espacio. Es decir, que no tiene curvatura.

Ejemplo: En coordenadas cartesianas: $(x^1, x^2) = (x, y)$, entonces,

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 = (dx^1)^2 + (dy^2)^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j$$

$$\Rightarrow \qquad \mathcal{G} = (\delta_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

***Ejemplo*:** En coordenadas polares: $(x^1, x^2) = (r, \theta)$, así se tiene que,

$$x = r\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad dx = (-r\,sen\theta)(d\theta) + (\cos\theta)(dr)$$
$$y = r\,sen\,\theta \qquad \Rightarrow \qquad dy = (r\cos\theta)(d\theta) + (\text{sen}\,\theta)(dr)$$

$\Rightarrow$

$$ds^2 = [(-r\,sen\theta)(d\theta) + (\cos\theta)(dr)]^2 + [(r\cos\theta)(d\theta) + (\text{sen}\,\theta)(dr)]^2$$
$$= r^2 sen^2\theta(d\theta)^2 - 2r\,sen\,\theta\cos\theta\, d\theta dr + cos^2\theta(dr)^2$$
$$+ r^2\cos^2\theta(d\theta)^2 + 2r\,sen\,\theta\cos\theta\, d\theta dr + sen^2\theta(dr)^2$$
$$ds^2 = (dr)^2 + (r)^2(d\theta)^2$$
$$\therefore\ ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2$$

De modo que:

$$\mathcal{G} = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

■

Ejemplo: En coordenadas cilíndricas: $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, z)$, entonces,

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

De modo que:

$$\mathcal{G} = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Ejemplo: En coordenadas esféricas: $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \varphi)$, entonces,

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (x^1 sen x^2)^2(dx^3)^2$$

De modo que:

$$\mathcal{G} = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1 sen x^2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sen^2\theta \end{bmatrix}$$

■

Ejemplo: En coordenadas afines con los ángulos que muestra la figura se tiene:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + 2\cos\alpha\, dx^1 dx^2 + 2\cos\beta\, dx^1 dx^3 + 2\cos\gamma\, dx^2 dx^3$$

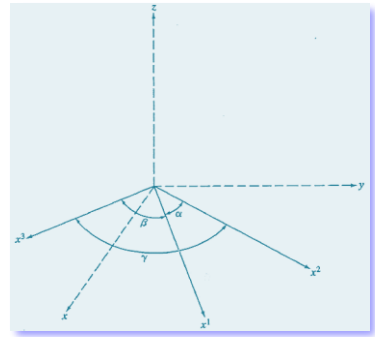


Figura 5.5.3: Coordenadas afines.

■

Métricas Generalizadas: Sea el campo matricial $\mathcal{G} = g_{ij}$ definido en el sistema (x^i), entonces se tienen las siguientes propiedades:

i) $\mathcal{G} \in C^2$: existen las derivadas parciales y son continuas.

ii) $\mathcal{G}$ es simétrica: $g_{ij} = g_{ji}$.

iii) $\mathcal{G}$ no es singular: $|g_{ij}| \neq 0$.

iv) La forma diferencial $\pm\, ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ es invariante.

Además, se puede escribir como:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \varepsilon g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \qquad \textbf{[5.5.2]}$$

Donde el parámetro de arco $\varepsilon = 1$ ó $\varepsilon = -1$

según si $g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \leq 0$ ó > 0.

Y como:

$$dx^i \equiv \frac{dx^i(t)}{dt}dt$$

Entonces,

$$\varepsilon ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \qquad \textbf{[5.5.3]}$$

Ejemplo: Supóngase el sistema de coordenadas $(x^i) \in \mathbb{R}^3$, entonces, si:

$$\boldsymbol{\mathcal{G}} = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} (x^1)^2 - 1 & 1 & 0 \\ 1 & (x^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{64}{9} \end{bmatrix}$$

Donde, además, $[(x^1)^2 - 1](x^2)^2 \neq 1$.

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{\mathcal{C}}: \begin{cases} x^1 = 2t - 1 \\ x^2 = 2t^2 \\ x^3 = t^3 \end{cases}; \qquad 0 \leq t \leq 1$$

La matriz métrica $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ definida de la forma anterior satisface las propiedades i) a iv), lo cual se puede demostrar fácilmente.

Ahora bien,

$$\varepsilon\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^T (g_{ij})\frac{dx^i}{dt}$$

Entonces, a lo largo de la curva:

$$\varepsilon\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = [2 \quad 4t \quad 3t^2]\begin{bmatrix} (2t-1)^2 - 1 & 1 & 0 \\ 1 & (2t^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{64}{9} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4t \\ 3t^2 \end{bmatrix}$$

$$= 643t^6 + 64t^4 + 16t^2$$

$$\varepsilon\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (8t^3 + 4t)^2; \quad \varepsilon = 1$$

Entonces,

$$s(t) = \int_0^t (8t^3 + 4t)^2\, du = [2u^4 + 2u^2]_0^t = 2t^4 + 2t^2$$

$$\therefore \quad L = 2(1)^4 + 2(1)^2 = 4.$$

■

Teorema: Si la matriz jacobiana para un sistema dado de coordenadas (x^i) con respecto de un sistema de coordenadas rectangulares $(\hat{x}^i)$ es $\boldsymbol{J} = (d\hat{x}^i/dx^j)$, entonces la matriz $\boldsymbol{\mathcal{G}} = (g_{ij})$ del tensor métrico euclidiano en el sistema (x^i) está dada por:

$$\boldsymbol{\mathcal{G}} = \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J}$$ ■

Ejemplo: Las coordenadas cilíndricas (x^i) y cartesianas $(\hat{x}^i)$ están conectadas por:

$$\hat{x}^1 = x^1 cosx^2, \quad \hat{x}^2 = x^1 senx^2, \quad \hat{x}^3 = x^3$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} cosx^2 & -x^1 senx^2 & 0 \\ senx^2 & x^1 cosx^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así que el tensor métrico euclidiano para las coordenadas cilíndricas es:

$$\boldsymbol{\mathcal{G}} = \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} cosx^2 & senx^2 & 0 \\ -x^1 senx^2 & x^1 cosx^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cosx^2 & -x^1 senx^2 & 0 \\ senx^2 & x^1 cosx^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O bien, $g_{11} = g_{33}$, $g_{22} = (x^1)^2$ y $g_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

■

NOTA: Se puede elegir para $\mathbb{R}^n$ cualquier tensor métrico $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ siempre que cumpla las propiedades i) a iv).

Norma generalizada: Extendiendo el resultado de la expresión **[5.1.22]** a un espacio generalizado con producto interior y una métrica definida, la norma o longitud de un vector arbitrario $\boldsymbol{V} = (V^i)$ o $\boldsymbol{V} = (V_i)$ de dimensión n, se tiene:

$$||\boldsymbol{V}|| = \sqrt{\boldsymbol{V}^2} = \sqrt{V_i V^i}, \left|\left|(V^i)\right|\right| = \sqrt{g_{ij}V^iV^j}y \left|\left|(V^i)\right|\right| \qquad \textbf{[5.5.4]}$$

$$= \sqrt{g^{ij}V_iV_j}$$

Ángulo entre vectores: Análogamente para la expresión [5.1.23], sean $\boldsymbol{U} = (U^i)$ y $\boldsymbol{V} = (V^j)$ dos vectores contravariantes cualesquiera de dimensión n, y sea θ el ángulo entre ellos. Entonces,

$$\cos\theta \equiv \frac{\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}}{||\boldsymbol{U}||||\boldsymbol{V}||} = \frac{g_{ij}U^iV^j}{\sqrt{g_{pq}U^pU^q}\sqrt{g_{rs}V^rV^s}};\quad 0 \le \theta \le \pi \qquad [5.5.5]$$

Subiendo y bajando índices: Otra de las operaciones fundamentales del cálculo de tensores es la que permite "subir" o "bajar" los índices de los tensores. Si se tiene un tensor contravariante (T^i) y si (g_{ij}) representa un tensor covariante de 2° orden, entonces el producto interno permite obtener un vector covariante.

$$T_i = g_{ij}T^j \qquad [5.5.6]$$

Si ahora, la matriz (g_{ij}) es el tensor métrico que es invertible, se puede tener la relación equivalente:

$$T^i = g^{ij}T_j \qquad [5.5.7]$$

Donde, $(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1}$.

Así se puede decir que un índice covariante ha sido "subido" para dar lugar a un índice contravariante.

Definición: El inverso de la matriz fundamental de campo, tensor métrico:

$$[g^{ij}]_{nm} = [g_{ij}]^{-1}_{nm} \qquad [5.5.8]$$

Se conoce como conjugado del tensor métrico.

Ambos tensores métricos pueden aplicarse libremente para crear nuevos tensores covariantes $(\boldsymbol{g})$ o sus contrapartes contravariantes $(\boldsymbol{g})^{-1}$.

Así, comenzando con el tensor mixto (T^{ij}_k),

$$T^{ijk} \equiv g^{ir}T_r^{jk},\ \ T^j_{ik} \equiv g_{ir}T_k^{jr}\ \ y\ \ T_{ijk} \equiv g_{is}T^s_{jk} = g_{is}g_{jr}T_k^{sr}$$

■

5.6 Derivadas Tensoriales

Si los Tensores nos van a permitir establecer vectores de posición independientes de los sistemas coordenados, podremos entonces describir trayectorias en espacios curvos (geodésicas) y requeriremos de expresiones para la velocidad por lo que se hace indispensable definir la Derivada Tensorial.

El punto importante es que, al derivar un tensor se desea obtener otro que pueda ser interpretado como tangente a la variedad geométrica. Sin embargo, al usar las reglas de derivación convencionales no se puede, al derivar un tensor, obtener otro propiamente; es decir, que en principio la derivación tensorial NO resulta una operación cerrada.

Así que para corregir la derivada "natural" de un tensor y que quede otro se deben introducir términos correctivos. Los llamados *Símbolos de Christoffel*.

Hay una discusión acerca de si esos términos correctivos de la derivada son o no tensores. Un estudio detallado permite demostrar que los símbolos de Christoffel sí son tensores, aunque cambian dependiendo de la métrica que esté en uso. A diferencia de los tensores de posición que se desea sean invariantes ante las diversas transformaciones de coordenadas, por ejemplo.

Finalmente, la definición de Derivada para Tensores al estar modificada respecto de la derivada convencional se conoce como *Derivada Covariante* y tiene una notación modificada o ligeramente diferente.

La primera vez que se lean, será necesario “arrastrar el lápiz” copiando los Símbolos de Christoffel que se presentan como ejemplo para lograr una buena comprensión de como operan.

Así pues, los tensores, al igual que otros objetos matemáticos, también pueden ser diferenciados con las herramientas del cálculo infinitesimal. Sin embargo, hay que tomar ciertas precauciones.

Si la derivada de un tensor ha de estar bien definida, no basta con que apliquemos las reglas del cálculo infinitesimal que ya conocemos para obtener algo que podríamos sentirnos tentados a llamar “la derivada de un tensor”. Es necesario que el resultado obtenido también se comporte como un tensor, es decir, que también se transforme de acuerdo con la definición del tensor bajo un cambio de coordenadas, de modo que permita escribir las relaciones matemáticas de modo tal que sean independientes del sistema de coordenadas utilizado.

Ejemplo: Demostrar que la derivada común u ordinaria del tensor covariante $\boldsymbol{T} = (T_p)$ de $1er$ orden no es un tensor.

Entonces, si $\boldsymbol{T} = (T_p)$ es un tensor covariante, de acuerdo con la definición de tensor:

$$\hat{T}_j = \frac{\partial x^p}{\partial \hat{x}^j} T_p$$

Diferenciando el tensor $\boldsymbol{T}$ respecto de $\hat{x}^k$, se tiene que:

$$\frac{\partial \hat{T}_j}{\partial \hat{x}^k} = \frac{\partial x^p}{\partial \hat{x}^j}\frac{\partial T_p}{\partial \hat{x}^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \hat{x}^k \partial \hat{x}^j} T_p$$

Aplicando la regla de la cadena a la inversa con el fin de que el primer término se transforme de acuerdo con la definición del tensor:

$$\frac{\partial \hat{T}_j}{\partial \hat{x}^k} = \frac{\partial x^p}{\partial \hat{x}^j}\frac{\partial T_p}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \hat{x}^k} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \hat{x}^k \partial \hat{x}^j} T_p$$

Reacomodando:

$$\frac{\partial \hat{T}_j}{\partial \hat{x}^k} = \frac{\partial x^p}{\partial \hat{x}^j}\frac{\partial x^q}{\partial \hat{x}^k}\frac{\partial T_p}{\partial x^q} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial \hat{x}^k \partial \hat{x}^j} T_p$$

El primer término en el lado derecho de la igualdad transforma de acuerdo con la definición del tensor, pero el segundo término (resaltado en amarillo) parece resistir cualquier intento de manipulación para lograr que también transforme de acuerdo con la definición del tensor. La derivada ordinaria del tensor $\boldsymbol{T}$ podría haber sido también un tensor, de no haber sido por este término adicional. Lo que tenemos obviamente ya no es un tensor, porque no se transforma como un tensor y no cumple con la definición básica del tensor.

■

Para resolver este problema, el matemático Elwin Bruno Christoffel propuso (en 1869) la única salida posible: redefinir el concepto de derivada de tensor agregando justo los términos adicionales requeridos para cancelar el término extra que aparece en la diferenciación ordinaria del tensor, haciéndolo de tal manera que se preserve la independencia de coordenadas.

Los "términos de corrección" se conocen como: *Símbolos de Christoffel* del 1er tipo y del 2° tipo, los cuales están definidos mediante tres índices y los cuales son obtenidos a su vez del tensor métrico del espacio correspondiente.

Naturalmente, al crear una nueva definición de la derivada de un tensor que no concuerda con la diferenciación ordinaria, ya no se puede seguir llamando derivada, por lo que se le conoce como derivada covariante.

NOTA: Desde el punto de vista geométrico, mientras que el tensor métrico describe sobre un espacio curvo una especie de "derivada de primer orden" de la curvatura, los símbolos de Christoffel, definidos como están a partir de las derivadas covariantes del tensor métrico, describen una especie de "derivada de segundo orden" de la curvatura.

Teorema: En cualquier sistema de coordenadas (x^i), la *derivada covariante* con respecto a x^k del tensor $\boldsymbol{T} = (T_i)$ es el tensor:

$$\boldsymbol{T}_{;k} \equiv T_{i;k} \equiv \left(\frac{\partial T_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^t T_t\right) \qquad \textbf{[5.6.1]}$$

Donde, Γ_{ik}^t representa los Símbolos de Christoffel del 2° tipo. ■

Símbolos de Christoffel del 1er tipo: Se caracterizan porque todos sus índices son subíndices, y están definidos mediante la siguiente relación:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}\right) \qquad \textbf{[5.6.2]}$$

O mediante la notación abreviada:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Se puede escribir:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}\right) \qquad \textbf{[5.6.3]}$$

O más aún, con la notación condensada:

$$g_{jk,\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{jk}$$

Se puede escribir:

$$\Gamma_{ijk} = \left(-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j}\right)/2 \qquad \textbf{[5.6.4]}$$

NOTA: Los Símbolos de Christoffel se obtienen a partir de un tensor métrico $\boldsymbol{G}$, si se conocen todos sus componentes entonces se pueden obtener todos los Símbolos de Christoffel del 1er tipo. Una vez obtenidos, se puede obtener la derivada covariante del tensor, que es el propósito final.

Ejemplo: Si se intercambian los dos primeros índices en un Símbolo de Christoffel del 1er tipo, el componente obtenido es el mismo, puesto que el tensor métrico es simétrico, o sea: $g_{ij} = g_{ji}$, tomando derivadas parciales con respecto a las coordenadas x^i, x^j y x^k, se obtiene:

$$g_{ij,k} = g_{ji,k} \quad g_{jk,i} = g_{kj,i} \quad \underset{g_{ki,j}}{} == g_{ik,j}$$

Puesto que:

$$\Gamma_{ijk} = \left(-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j}\right)/2 \qquad \Gamma_{jik} = \left(-g_{ij,k} + g_{ik,j} + g_{kj,i}\right)/2$$

Entonces se obtiene de inmediato: $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$.

■

Ejemplo: Demostrar que en cualquier sistema de coordenadas los Símbolos de Christoffel de 1er tipo se desvanecen si y solo si el tensor métrico tiene componentes constantes.

Entonces, permutando los índices de los Símbolos de Christoffel del 1er tipo del arreglo (ijk):

$$\Gamma_{ijk} = \left(-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j}\right)/2$$

Al arreglo (jki) se tiene que:

$$\Gamma_{jki} = \left(-g_{jk,i} + g_{ki,j} + g_{ij,k}\right)/2$$

Entonces, sumando ambas expresiones, se obtiene:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki}$$

Si el tensor métrico $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ tiene componentes constantes en cierto sistema de coordenadas, entonces todas las derivadas del tipo $\partial g_{ik}/\partial x^j$ serán iguales a cero, y la única manera en la que la suma de los componentes Γ_{ijk} y Γ_{jki} sea cero en todos los casos es que los Símbolos de Christoffel sean iguales a cero en todos los casos.

■

Ejemplo: Obtener los Símbolos de Christoffel del 1er tipo para la métrica Euclidiana en coordenadas esféricas.

En coordenadas esféricas $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \varphi)$ el elemento de línea ds^2 está dado por:

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 sen^2\,\theta(d\varphi)^2$$

O bien,

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (x^1)^2 sen^2\,(x^2)(dx^3)^2$$

Entonces, las componentes del tensor métrico $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ en su representación matricial, son:

$$\boldsymbol{\mathcal{G}} = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sen^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1)^2 sen^2(x^2) \end{bmatrix}$$

Con los componentes del tensor métrico $\boldsymbol{\mathcal{G}}$, el cálculo de los Símbolos de Christoffel procede de manera directa.

Entonces,

$$g_{22,1} = 2x^1, \quad g_{33,1} = 2x^1 sen^2(x^2), \quad g_{33,2} = 2(x^1)^2 sen(x^2)\, cos(x^2)$$

y todos los otros $g_{ij,k}$ son cero.

Así se tiene para todos los $\Gamma_{ijk} = \left(-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j}\right)/2$:

$\Gamma_{111} = (-g_{11,1} + g_{11,1} + g_{11,1})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$
$\Gamma_{112} = (-g_{11,2} + g_{12,1} + g_{21,1})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$
$\Gamma_{113} = (-g_{11,3} + g_{13,1} + g_{31,1})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$

$\Gamma_{121} = (-g_{12,1} + g_{21,1} + g_{11,2})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$
$\Gamma_{122} = (-g_{12,2} + g_{22,1} + g_{21,2})/2 = (0 + 2x^1 + 0)/2 = x^1$
$\Gamma_{123} = (-g_{12,3} + g_{23,1} + g_{31,2})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$

$\Gamma_{131} = (-g_{13,1} + g_{31,1} + g_{11,3})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$
$\Gamma_{132} = (-g_{13,2} + g_{32,1} + g_{21,3})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$
$\Gamma_{133} = (-g_{13,3} + g_{33,1} + g_{31,3})/2 = (0 + 2x^1 sen^2(x^2) + 0)/2 = x^1 sen^2(x^2)$

$\Gamma_{211} = (-g_{21,1} + g_{11,2} + g_{12,1})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$
$\Gamma_{212} = (-g_{21,2} + g_{12,2} + g_{22,1})/2 = (0 + 0 + 2x^1)/2 = x^1$
$\Gamma_{213} = (-g_{21,3} + g_{13,2} + g_{32,1})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$

$\Gamma_{221} = (-g_{22,1} + g_{21,2} + g_{12,2})/2 = (-2x^1 + 0 + 0)/2 = -x^1$
$\Gamma_{222} = (-g_{22,2} + g_{22,2} + g_{22,2})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$
$\Gamma_{223} = (-g_{22,3} + g_{23,2} + g_{32,2})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$

$\Gamma_{231} = (-g_{23,1} + g_{31,2} + g_{12,3})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$
$\Gamma_{232} = (-g_{23,2} + g_{32,2} + g_{22,3})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$
$\Gamma_{233} = (-g_{23,3} + g_{33,2} + g_{32,3})/2 = (0 + 2(x^1)^2 sen\, x^2 cos\, x^2 + 0)/2 = (x^1)^2 sen\, x^2 cos\, x^2$

$\Gamma_{311} = (-g_{31,1} + g_{11,3} + g_{13,1})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$
$\Gamma_{312} = (-g_{31,2} + g_{12,3} + g_{23,1})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$
$\Gamma_{313} = (-g_{31,3} + g_{13,3} + g_{33,1})/2 = (0 + 0 + 2x^1 sen^2(x^2))/2 = x^1 sen^2(x^2)$

$\Gamma_{321} = (-g_{32,1} + g_{21,3} + g_{13,2})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$
$\Gamma_{322} = (-g_{32,2} + g_{22,3} + g_{23,2})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$
$\Gamma_{323} = (-g_{32,3} + g_{23,3} + g_{33,2})/2 = (0 + 0 + 2(x^1)^2 sen\, x^2 cos\, x^2)/2 = (x^1)^2 sen\, x^2 cos\, x^2$

$\Gamma_{331} = (-g_{33,1} + g_{31,3} + g_{13,3})/2 = (-2x^1 sen^2(x^2) + 0 + 0)/2 = -x^1 sen^2(x^2)$
$\Gamma_{332} = (-g_{33,2} + g_{32,3} + g_{23,3})/2 = (-2(x^1)^2 sen\, x^2 cos\, x^2 + 0 + 0)/2 = -(x^1)^2 sen\, x^2 cos\, x^2$
$\Gamma_{333} = (-g_{33,3} + g_{33,3} + g_{33,3})/2 = (0 + 0 + 0)/2 = 0$

Desde luego, observando la simetría se puede acortar el trabajo. ■

Propiedades básicas:

1. Simetría en los primeros dos índices: $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$.
2. $\Gamma_{ijk} = 0$ si $g_{ij} = cte$.
3. $\partial g_{ik}/\partial x^j = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki}$

Símbolos de Christoffel del 2° tipo:

Para seguir desmenuzando la Derivada Covariante se definen como auxiliares los Símbolos de Christoffel del 2° tipo.

Estos simplemente ofrecen una notación apropiada para las situaciones operativas y mantener el cumplimiento de las diferentes propiedades de estos objetos matemáticos.

Para generarlos se utiliza el tensor métrico $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ para subir el tercer subíndice:

$$\Gamma_{ik}^{t} \equiv g^{ir}\Gamma_{ijr} \qquad \textbf{[5.6.5]}$$

NOTA: En realidad, esta segunda definición es hasta cierto punto trivial, porque no es más que una subida de índice con la ayuda del tensor métrico que ya habíamos estudiado previamente.

Es importante recalcar el hecho de que, aunque la operación de elevación del tercer subíndice en los Símbolos de Christoffel del 1er tipo siempre se hace con la ayuda del tensor métrico $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ y aunque se escriben de una manera parecida a como se escriben las expresiones propias del cálculo tensorial, los Símbolos de Christoffel no son tensores. No pueden serlo, ya que fueron agregados precisamente como una "compensación" para poder definir una derivada tensorial. ¡No pueden serlo!, porque para obtenerlos es necesario obtener las derivadas parciales ordinarias del tensor métrico, las cuales no son tensores por las razones ya señaladas; y además no se transforman como los tensores bajo un cambio de coordenadas.

Del mismo modo como se tuvo $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$ para los Símbolos de Christoffel del 1er tipo, esta propiedad de simetría se aplica también a los Símbolos de Christoffel del 2° tipo sobre los dos índices inferiores, o sea:

$$\Gamma_{jk}^{i} = \Gamma_{kj}^{i}.$$

Ejemplo: Se calculan los Símbolos de Christoffel del 2° tipo para el tensor métrico euclidiano en coordenadas polares.

Ya que,

$$\boldsymbol{\mathcal{G}} = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 \end{bmatrix}$$

Se tiene:

$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2}g_{111} = 0, \quad \Gamma_{121} = \Gamma_{211} = \frac{1}{2}(-g_{121} + g_{211} + g_{112}) = 0$$

$$\Gamma_{221} = \frac{1}{2}(-g_{221} + g_{212} + g_{122}) = -x^1, \quad \Gamma_{112} = \frac{1}{2}(-g_{112} + g_{121} + g_{211}) = 0$$

$$\Gamma_{122} = \Gamma_{212} = \frac{1}{2}(-g_{122} + g_{221} + g_{212}) = x^1, \quad \Gamma_{222} = \frac{1}{2}g_{222} = 0$$

Continuando:

$$\boldsymbol{\mathcal{G}^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x^1)^{-2} \end{bmatrix}$$

Y, ya que: $g_{12} = 0 = g_{21}$, se sigue que, $\Gamma^i_{jk} = g^{ir}\Gamma_{jkr}$, de donde,

$$\Gamma^1_{22} = -x^1, \quad \Gamma^1_{jk} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = (x^1)^{-1}, \quad \Gamma^2_{jk} = 0$$

■

Propiedades: Las propiedades básicas de Γ_{ijk} se transfieren a Γ^i_{jk},

1. Simetría en los índices: $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.
2. Todos los $\Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}}$ son cero cuando $\mathrm{g_{ij}} = \mathrm{cte}$.

Derivada Covariante: Una vez familiarizados con los Símbolos de Christoffel, se puede definir apropiadamente la *derivada covariante* de un tensor, la cual tendrá como propósito principal el producir algo que pueda ser transformado de acuerdo con la definición del tensor, este tipo de derivada no puede ser simbolizado con la misma "coma" que utilizamos para la definición de la diferenciación parcial ordinaria abreviada. Para ello, utilizamos el "punto y coma", o sea "**;**".

Entonces, para un tensor contravariante $\boldsymbol{T} = (T^i)$ con respecto a la coordenada x^k se tiene:

$$\boldsymbol{T}_{;k} \equiv T^i_{;k} \equiv \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{tk}T^t\right) = \left(T^i_{,k} + \Gamma^i_{tk}T^t\right) \qquad \textbf{[5.6.6]}$$

NOTA: Para sistemas rectangulares (coordenadas Cartesianas) los Símbolos de Christoffel se reducen a cero, y las derivadas covariantes se reducen a las derivadas parciales comunes.

Las definiciones anteriores se pueden extender a derivadas covariantes de tensores de orden mayor.

En el caso más general, estamos hablando de la derivada covariante de un tensor mixto contravariante de orden m y covariante de orden n.

La derivada covariante de un tensor cualquiera incrementa el orden covariante del tensor resultante en una unidad.

Ejemplo: La derivada de un tensor mixto contravariante de orden 7 y covariante de orden 4 será un tensor de orden 12, aún contravariante de orden siete pero covariante de orden 5.

■

Ejemplo: Siendo T^i_{jrs} las componentes de un tensor de orden (1; 3), en la derivada covariante debe haber 3 correcciones covariantes y 1 contravariante, es decir 3 términos son positivos y uno negativo en la derivada. De modo que se obtiene:

$$T^i_{klm;q} = \frac{\partial T^i_{klm;q}}{\partial x^q} - \Gamma^s_{kq}T^j_{slm} - \Gamma^s_{lq}T^j_{ksm} - \Gamma^s_{mq}T^j_{kls} + \Gamma^s_{qk}T^s_{klm}$$

■

Diferenciación absoluta a lo largo de una curva: Debido a que $\left(T^i_{;j}\right)$ es un tensor el producto interior con otro tensor también lo será. Supóngase que el otro tensor es $\left(dx^i/dt\right)$ el vector tangente a la curva $\mathcal{C}: x^i = x^i(t)$. Entonces el producto interior:

$$\left(T^i_{;j}\frac{dx^i}{dt}\right)$$

Es un tensor del mismo tipo y orden que el tensor original $\left(T^i\right)$. Este tensor se conoce como *derivada absoluta* de $\left(T^i\right)$ a lo largo de la curva $\mathcal{C}$; y sus componentes se escriben como:

$$\left(\frac{\delta T^i}{\delta t}\right) \equiv \frac{dT^i}{dt} + \Gamma^i_{rs}T^r\frac{dx^s}{dt}; T^i = T^i\left(\boldsymbol{x}(t)\right) \qquad \textbf{[5.6.7]}$$

En un sistema coordenado en el que g_{ij} sea constante, la derivada absoluta se reduce a la derivación ordinaria.

Aceleración en coordenadas generalizadas: en coordenadas rectangulares el vector de aceleración de una partícula se calcula con la derivada temporal del vector velocidad o con la segunda derivada con respecto a la función de posición $\boldsymbol{x} = \left(x^i(t)\right)$:

$$\boldsymbol{a} = \left(a^i\right) = \left(\frac{d}{dt}\frac{dx^i}{dt}\right) = \left(\frac{d^2x^i}{dt^2}\right) \qquad \textbf{[5.6.8]}$$

La longitud euclidiana de este vector al tiempo t es la aceleración instantánea de la partícula:

$$a = \sqrt{\delta_{ij} a^i a^j} \qquad \textbf{[5.6.9]}$$

Dado que las derivadas se toman a lo largo de las trayectorias de las partículas, la generalización natural de **[5.6.8]** al caso tensorial es:

$$\boldsymbol{a} = (a^i) = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{rs}\frac{dx^r}{dt}\frac{dx^s}{dt}, \qquad a = \sqrt{\left|g_{ij} a^i a^j\right|} \qquad \textbf{[5.6.10]}$$

Curvatura en coordenadas generalizadas: En geometría euclidiana se define la curvatura de una curva $\mathcal{C}: x^i = x^i(t)$ usualmente como la norma de la segunda derivada de $\left(x^i(s)\right)$:

$$\kappa(s) = \sqrt{\delta_{ij}\frac{d^2x^i}{ds^2}\frac{d^2x^j}{ds^2}} \qquad \textbf{[5.6.11]}$$

Donde,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\delta_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}} \qquad \textbf{[5.6.12]}$$

da el parámetro de arco. La manera obvia para extender estos conceptos como invariantes nuevamente utiliza la derivación absoluta. De modo que:

$$(b^i) \equiv \left(\frac{\delta}{\delta s}\frac{dx^i}{ds}\right) = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds}, \kappa(s) = \sqrt{\left|g_{ij} b^i b^j\right|} \qquad \textbf{[5.6.13]}$$

Geodésicas: una importante aplicación de la ecuación **[5.6.13]** en coordenadas curvilíneas es la siguiente:

Supóngase que se busca una curva para la cual $\kappa = 0$; es decir una geodésica.

Para una métrica definida como positiva, esta condición es equivalente a:

$$b^i = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0, (i = 1,2,\dots,n) \qquad \textbf{[5.6.14]}$$

La solución de este sistema de ecuaciones diferenciales de 2° orden definen la curva geodésica $x^i = x^i(s)$.

Reglas para la diferenciación covariante:

- Suma: $(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S})_{;k}=\boldsymbol{T}_{;k}+\boldsymbol{S}_{;k}$
- Producto Exterior: $[\boldsymbol{TS}]_{;k}=[\boldsymbol{T}_{;k}\boldsymbol{S}]+[\boldsymbol{TS}_{;k}]$
- Producto Interior: $(\boldsymbol{TS})_{;k}=\boldsymbol{T}_{;k}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{TS}_{;k}$

Reglas para la diferenciación absoluta:

- Suma: $\frac{\delta}{\delta t}(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S})=\frac{\delta \boldsymbol{T}}{\delta t}+\frac{\delta \boldsymbol{s}}{\delta t}$
- ProductoExterior: $\frac{\delta}{\delta t}[\boldsymbol{TS}]=\left[\frac{\delta \boldsymbol{T}}{\delta t}\boldsymbol{S}\right]+\left[\boldsymbol{T}\frac{\delta \boldsymbol{S}}{\delta t}\right]$
- Producto Interior: $\frac{\delta}{\delta t}(\boldsymbol{TS})=\frac{\delta \boldsymbol{T}}{\delta t}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}\frac{\delta \boldsymbol{S}}{\delta t}$

6 Otros Resultados de la Relatividad Especial

Con lo que hemos visto de Cálculo Tensorial estamos listos para incursionar en la Relatividad General y estudiar la ecuación de Einstein que es precisamente una ecuación Tensorial.

Pero antes, aprovechemos para escribir las ecuaciones de Maxwell de manera que las coordenadas del espacio y del tiempo estén tratadas a un nivel equivalente tal como se hace en relatividad; y para ello usemos la notación tensorial y la formulación covariante del electromagnetismo.

Con ello se extiende la teoría fisicomatemática de la relatividad para abarcar la mecánica y el electromagnetismo.

6.1 Electrodinámica Relativista

Para desarrollar la Teoría Especial de la Relatividad Einstein se inspiró en la Teoría del Electromagnetismo de Maxwell, en la cual tampoco hay observadores privilegiados capaces de poder detectar el movimiento absoluto. Así que, no debe extrañar que las ecuaciones del campo electromagnético sean invariantes bajo transformaciones de Lorentz.

En la electrodinámica clásica, tanto el vector del campo eléctrico:

$$\boldsymbol{E}=(E_1,E_2,E_3)=\left(E_x,E_y,E_z\right)$$

como el vector del campo magnético:

$$\boldsymbol{B}=(B_1,B_2,B_3)=\left(B_x,B_y,B_z\right)$$

no son cuadrivectores, constan de 3 componentes únicamente.

Sin embargo, las seis componentes E_x, E_y, E_z, B_x, B_y y B_z pueden ser utilizadas para definir un tensor antisimétrico conocido como *Tensor de Faraday*:

$$F = [F^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{[6.1.1]}$$

Este tensor electromagnético logra unificar en un cuadriespacio las tres componentes del vector campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ con las tres componentes del vector campo magnético $\boldsymbol{B}$; y es un tensor contravariante de orden 2.

NOTA: Los sub-índices numéricos empleados para distinguir las componentes de $\boldsymbol{E}$ y de $\boldsymbol{B}$ no se corresponden directamente con los índices numéricos empleados para distinguir los 16 componentes del *Tensor de Faraday*.

En el ámbito de la Teoría Especial de la Relatividad el campo electromagnético y el campo gravitacional pueden ser unificados bajo un solo esquema matemático, como lo han demostrado Theodor Kaluza (1919) y Oskar Klein (1926).

Utilizando el tensor métrico $\boldsymbol{G}$ que describe la curvatura del espacio-tiempo en un *cuadriespacio* relativista $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (ct, x, y, z)$ para subir los índices de los componentes del tensor electromagnético. Entonces, se tiene que:

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} F^{\gamma\delta} g_{\delta\beta} \qquad \textbf{[6.1.2]}$$

La ecuación anterior es una ecuación tensorial en notación de componentes que requiere llevar a cabo una doble sumatoria sobre los índices repetidos.

El cómputo se puede facilitar si en lugar de la ecuación tensorial utilizamos la ecuación matricial correspondiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{[6.1.3]}$$

De donde se obtiene:

$$F = [F_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{[6.1.4]}$$

Resulta obvio que los elementos de $F_{\alpha\beta}$ se pueden obtener a partir de los elementos de $F^{\alpha\beta}$ sustituyendo $\boldsymbol{E}$ por $-\boldsymbol{E}$.

Para recuperar las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell a partir del tensor de Faraday es necesario además de la ayuda de algunas ecuaciones diferenciales adicionales, siendo la primera de ellas la siguiente:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta}_{,\alpha} = \frac{4\pi}{c} J^\beta \qquad \textbf{[6.1.5]}$$

Que conduce al principio de la conservación de la carga eléctrica: $J^\mu_{,\mu} = 0$.

Definiendo la densidad de corriente eléctrica $\boldsymbol{J}$ de manera relativista; es decir, la densidad de corriente y la carga eléctrica ρ no pueden ser entidades físicas independientes puesto que una carga eléctrica que permanece estática en un sistema de referencia en reposo S se nos convertirá en una distribución de corriente eléctrica en un marco de referencia móvil.

$$\boldsymbol{J} \equiv \left(c\rho, J_x, J_y, J_z\right) = (c\rho, \bar{J}) \qquad \textbf{[6.1.6]}$$

Así pues, escribiendo la ecuación **[6.1.5]** anterior de manera explícita se tiene:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\beta \qquad \textbf{[6.1.7]}$$

La condición matemática para la conservación de la carga eléctrica, $J^\mu_{,\mu} = 0$, requiere tomar la derivada con respecto x^μ, lo cual en conformidad con la convención para índices repetidos activa la sumación de términos. Tomando, pues, la derivada con respecto a x^μ en ambos lados de la ecuación:

$$\frac{\partial^2 F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu_{,\mu} \qquad \textbf{[6.1.8]}$$

Pero el tensor de Faraday es antisimétrico, de modo que $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, lo cual implica:

$$\frac{\partial^2 F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\frac{\partial^2 F^{\nu\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \qquad \textbf{[6.1.9]}$$

Donde además se ha invertido también el orden de la diferenciación dado que en la diferenciación ordinaria (a diferencia de lo que ocurre con la derivada covariante) el orden de la diferenciación no altera el resultado final.

Y como ninguna cantidad puede ser igual al negativo de esta a menos de que esta sea cero. Se concluye que el lado izquierdo de la expresión debe ser igual a cero.

$$\therefore \quad J^\mu_{,\mu} = 0 \qquad \textbf{[6.1.10]}$$

Primera ley del electromagnetismo de Maxwell: A partir del tensor de Faraday se toma la ecuación **[6.1.7]**:

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{4\pi}{c} J^{\beta} \qquad \textbf{[6.1.11]}$$

Poniendo $\beta = 1$ en la expresión anterior y desarrollando la sumatoria de acuerdo con la convención de Einstein, se tiene que:

$$\frac{\partial F^{11}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial F^{21}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^{3}} + \frac{\partial F^{41}}{\partial x^{4}} = \frac{4\pi}{c} J^{1} \qquad \textbf{[6.1.12]}$$

O bien,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} c\rho = 4\pi\rho \qquad \textbf{[6.1.13]}$$

$$\therefore \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho \qquad \textbf{[6.1.14]}$$

Que corresponde a la *Ley de Gauss* en su forma diferencial.

Segunda ley del electromagnetismo de Maxwell: Considérese ahora el caso en el que $\beta = 2$ en el tensor de Faraday, entonces:

$$\frac{\partial F^{12}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial F^{22}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x^{3}} + \frac{\partial F^{42}}{\partial x^{4}} = \frac{4\pi}{c} J^{2} \qquad \textbf{[6.1.15]}$$

Puesto que $F^{22} = 0$, solo quedan tres términos del lado izquierdo de la ecuación. Reacomodando estos términos y escribiéndolos explícitamente se tiene:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} J^{x} \qquad \textbf{[6.1.16]}$$

Procediendo de manera análoga para $\beta = 3$, se obtiene:

$$\frac{\partial F^{13}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial F^{23}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial F^{33}}{\partial x^{3}} + \frac{\partial F^{43}}{\partial x^{4}} = \frac{4\pi}{c} J^{3} \qquad \textbf{[6.1.17]}$$

Que conduce a:

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} J^{y} \qquad \textbf{[6.1.18]}$$

Y finalmente haciendo $\beta = 4$, se tiene que:

$$\frac{\partial F^{14}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial F^{24}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial F^{34}}{\partial x^{3}} + \frac{\partial F^{44}}{\partial x^{4}} = \frac{4\pi}{c} J^{4} \qquad \textbf{[6.1.19]}$$

Para obtener:

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} J^{z} \qquad \textbf{[6.1.20]}$$

Juntando los tres resultados anteriores, se obtiene finalmente:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\bar{J} \qquad \textbf{[6.1.21]}$$

Que se conoce como la *Ley de Ampere Generalizada* en su forma diferencial.

Tercera Ley de Maxwell: Usando únicamente los índices espaciales del tensor de Faraday, sin importar el orden, se tendría una expresión como,

$$F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} + F_{\alpha\beta,\gamma} = 0 \qquad \textbf{[6.1.22]}$$

Digamos $\alpha = 2$, $\beta = 3$ y $\gamma = 4$, de aquí se obtiene:

$$\frac{\partial F_{34}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x^4} = 0 \qquad \textbf{[6.1.23]}$$

O bien, sustituyendo los índices explícitos:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \textbf{[6.1.24]}$$

Que es la *Ley de Gauss para el campo magnético* que afirma que no hay monopolos ("cargas") magnéticos, las líneas del campo magnético siempre son trayectorias cerradas.

Cuarta Ley de Maxwell: Trabajando ahora la ecuación **[6.1.22]** pero con la variante de incluir el índice 1, y todas las combinaciones de los otros dos índices se obtienen las siguientes tres ecuaciones:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \qquad \textbf{[6.1.25]}$$

Que en forma compacta se pueden expresar como:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad \textbf{[6.1.26]}$$

Que es la *Ley de Inducción de Faraday* en su forma diferencial.

Así pues, vemos que el Tensor de Faraday contiene entre otras propiedades las cuatro ecuaciones fundamentales del electromagnetismo.

Además, se puede demostrar que el producto $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}$ es una invariante lorenziana. De este resultado se puede sacar una conclusión importante Si el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ es perpendicular al campo magnético $\boldsymbol{B}$ en un marco de referencia S, entonces ambos seguirán siendo perpendiculares en cualquier marco de referencia S'. Este es el caso de las ondas electromagnéticas.

Ondas electromagnéticas en medios no conductores: En los medios en los que no hay cargas ni corrientes libres, las ecuaciones de los campos electromagnéticos son:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \qquad [6.1.27]$$

Que son ecuaciones vectoriales. Tomando el rotacional de la tercera ecuación:

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{0} \qquad [6.1.28]$$

Lo cual permite cambiar el orden de las derivadas espacial y temporal; y usando las identidades de operadores vectoriales, al sustituir $\nabla \times \boldsymbol{B}$ en la ecuación se tiene:

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = 0 \qquad [6.1.29]$$

pero $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$, entonces:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad [6.1.30]$$

Realizando operaciones análogas en la cuarta ecuación, se obtiene:

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad [6.1.31]$$

Ambas **[6.1.30]** y **[6.1.31]** son ecuaciones de onda. Del coeficiente de las derivadas temporales, se ve que la velocidad de propagación de las ondas es la constante c.

Y aún más, al descomponer los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ en sus componentes paralelas y perpendiculares al eje del movimiento relativo entre los marcos de referencia S y S', se obtendrá como resultado que el campo eléctrico y el campo magnético no pueden tener una existencia independiente el uno del otro. Un campo eléctrico puro $\boldsymbol{E}$ (sin la presencia de campo magnético alguno) en el sistema de referencia S se transforma en campos eléctrico y magnético en el sistema de referencia S'; y no existe velocidad alguna menor que la velocidad de la luz que permita la existencia de un campo magnético puro $\boldsymbol{B}$ en el sistema de referencia S'. En pocas palabras, si existe un marco de referencia Lorentziano en el cual el campo sea completamente eléctrico, es imposible encontrar otro marco de referencia lorentziano en el cual el campo sea completamente magnético.

De este modo, así como el espacio y el tiempo han dejado de tener una existencia independiente el uno del otro (matemáticamente hablando) y han sido unificados en un cuadrivector como un solo concepto, el del espacio-tiempo, del mismo modo el campo eléctrico y el campo magnético tampoco tienen una existencia independiente el uno del otro, habiendo sido unificados bajo el *Tensor de Faraday*.

A fin de cuentas, la razón de ser del Tensor de Faraday, el llevar a cabo a su máximo la unificación de las leyes del electromagnetismo.

6.2 Formulación covariante de las Ecuaciones de Maxwell

Sean:

1. Ley de Gauss para el campo eléctrico: Describe cómo las cargas eléctricas crean campos eléctricos.

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \textbf{[6.2.1]}$$

2. Ley de Ampère-Maxwell: Describe cómo las corrientes y campos eléctricos cambiantes crean campos magnéticos.

$$= \mu_0 \vec{\boldsymbol{J}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \qquad \textbf{[6.2.2]}$$

3. Ley de Gauss para el campo magnético: Establece que no existen "cargas magnéticas" (monopolos) aisladas; las líneas de campo magnético son cerra$\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}$das.

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \qquad \textbf{[6.2.3]}$$

4. Ley de Faraday de la inducción: Describe cómo un campo magnético cambiante crea un campo eléctrico.

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \qquad \textbf{[6.2.4]}$$

Donde $\vec{\boldsymbol{E}}$ es el campo eléctrico, $\vec{\boldsymbol{B}}$ es el campo magnético y $\vec{\boldsymbol{J}}$ la densidad de corriente; ρ la densidad de carga, $\vec{\boldsymbol{J}}$ la densidad de corriente, ϵ_0 la permitividad del vacío, μ_0 la permeabilidad del vacío y c la constante de la velocidad de la luz

Estas ecuaciones han resistido a todas las teorías de la Física que han venido después, incluida la relatividad. Esto significa que deberían poder aplicarse cuando tratemos con fenómenos relativistas.

Hay una forma de escribir estas ecuaciones, llamada formulación covariante, en la que tenemos esta simetría. Serán las mismas ecuaciones, pero escritas de otro modo.

Sabemos que los campos eléctrico y magnético pueden derivarse de los potenciales escalar y vectorial, ϕ y $\vec{A}$.

1. Relación entre Campos y Potenciales:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \textbf{[6.2.5]}$$

2. Definición del Cuadrivector (Notación con componente imaginaria):

Se define un vector de cuatro dimensiones $\vec{U}$, usualmente conocido como cuadripotencial A_μ o *Potencial Universal*, agrupando el potencial vectorial y el escalar para ser compatible con la Relatividad Especial.

$$\vec{U} = (U_1, U_2, U_3, U_4) \qquad \textbf{[6.2.6]}$$

Sus componentes se definen como:

$$U_1 = A_x, \quad U_2 = A_y, \quad U_3 = A_z, \quad U_4 = \frac{i\phi}{c} \qquad \textbf{[6.2.7]}$$

Donde $\vec{A}$ es el Potencial Vectorial Magnético, $\boldsymbol{\phi}$ el Potencial Escalar Eléctrico, e $\boldsymbol{i}$ la unidad imaginaria ($\sqrt{-1}$). Esta notación (usando ict para el tiempo) se usaba antiguamente para simplificar los cálculos en el espacio-tiempo de Minkowski.

Si calculamos las tres componentes del campo eléctrico y las tres del campo magnético, usando las definiciones anteriores, y sustituimos las componentes de los potenciales vector y escalar por las del *Potencial Universal*, obtenemos las ecuaciones que representan componente por componente el **Tensor de Campo Electromagnético** ($\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$).

El campo eléctrico se relaciona con las derivadas de las componentes del cuadripotencial $\boldsymbol{U}$ con respecto a las coordenadas espaciotemporales.

$$\frac{i}{c}E_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x_4} - \frac{\partial U_4}{\partial x_1}, \quad \frac{i}{c}E_2 = \frac{\partial U_2}{\partial x_4} - \frac{\partial U_4}{\partial x_2}, \quad \frac{i}{c}E_3 = \frac{\partial U_3}{\partial x_4} - \frac{\partial U_4}{\partial x_3} \qquad \textbf{[6.2.8]}$$

Y las expresiones explícitas del rotacional $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, usando x_1, x_2, x_3 como coordenadas x, y, z:

$$B_1 = \frac{\partial A_z}{\partial x_2} - \frac{\partial A_y}{\partial x_3}, \quad B_2 = \frac{\partial A_x}{\partial x_3} - \frac{\partial A_z}{\partial x_1}, \quad B_3 = \frac{\partial A_y}{\partial x_1} - \frac{\partial A_x}{\partial x_2} \qquad \textbf{[6.2.9]}$$

Estas ecuaciones son fundamentales en la formulación covariante del electromagnetismo. Muestran cómo los campos eléctrico y magnético no son entidades separadas, sino partes de un mismo objeto geométrico (el tensor) y que se mezclan dependiendo del sistema de referencia.

Por tanto, $\vec{\boldsymbol{B}}$ y $\frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{E}}$ juntos, forman el rotacional cuatridimensional de $\vec{U}$.

Si ahora definimos una cantidad a la que vamos a llamar ***F***, Tensor de Campo Electromagnético, como:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial U_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu} \qquad \textbf{[6.2.10]}$$

Resulta que ***F*** es el rotacional en cuatro dimensiones de $\vec{U}$.

$$F \overset{\text{def}}{=} \vec{\square} \times \vec{U} \qquad \textbf{[6.2.11]}$$

Donde ***F*** en forma matricial se escribe:

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{[6.2.12]}$$

Ahora tenemos que calcular la divergencia del tensor de campo electromagnético. Nos queda lo siguiente:

$$\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_{\nu} \frac{\partial U_\nu}{\partial x_\nu} - \sum_{\nu} \frac{\partial^2 U_\mu}{\partial x_\nu^2} \qquad \textbf{[6.2.13]}$$

Aunque parece que las expresiones son cada vez más complicadas, en realidad, ya está casi todo el trabajo hecho.

Los dos sumandos a la derecha van a simplificarse, de tal forma, que van a llevar a una fórmula muy sencilla para justo la 2a de las ecuaciones de Maxwell.

El primer sumando es cero. Y ¿por qué? La respuesta está en una condición que hacemos cumplir a los potenciales escalar y vectorial, la llamada condición de Lorenz. Es ésta:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad \textbf{[6.2.14]}$$

Que escrita en función de las componentes del potencial universal es:

$$\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial U_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \qquad \textbf{[6.2.15]}$$

Hay una razón para imponer esta condición y es simplificar las expresiones que se obtienen cuando en la segunda y cuarta ecuaciones de Maxwell sustituimos las ecuaciones que relacionan los campos con los potenciales.

Operando, tras esta simplificación, llegamos a una *ecuación de onda* para el potencial vector:

$$\nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{\boldsymbol{J}} \qquad \textbf{[6.2.16]}$$

Usando el cuadripotencial se escribe así:

$$\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial^2 U_\lambda}{\partial x_\nu^2} = -\mu_0 J_\lambda \qquad \textbf{[6.2.17]}$$

donde J_λ son las componentes del cuadrivector $\boldsymbol{J}$. Porque la densidad de corriente también puede, y debe, escribirse en forma covariante. Las tres primeras componentes serán las componentes conocidas en tres dimensiones y la cuarta es $ic\rho$. Esto es así debido a la relación que existe entre ambas, la conocida ecuación de continuidad:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{J}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \textbf{[6.2.18]}$$

Usando el cuadrivector se escribe:

$$\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial J_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \qquad \textbf{[6.2.19]}$$

O, lo que es lo mismo: $\vec{\square} \cdot \vec{\boldsymbol{J}} = 0$ **[6.2.20]**

Que es el paso final para demostrar que las ecuaciones del electromagnetismo son **invariantes bajo transformaciones de Lorentz** (es decir, cumplen con la Relatividad Especial).

1. La primera ecuación **[6.2.16]** es la **Ecuación de Onda** clásica para el electromagnetismo.
2. La segunda ecuación **[6.2.17]** es la misma ecuación, pero escrita en **formato cuatridimensional** (mucho más compacta).
3. Las ecuaciones finales muestran que la **conservación de la carga** (ecuación de continuidad) también es una ley geométrica natural en el espacio-tiempo de 4 dimensiones.

Pero, no nos desviemos del camino. En la ecuación de onda del potencial vector escrita usando el cuadripotencial aparece, a la izquierda del igual, una expresión que vimos antes cuando calculamos la divergencia del tensor de campo electromagnético.

Vamos a sustituir en la expresión de la divergencia del tensor esta expresión por lo que nos ha salido en la ecuación del potencial vector.

Y nos encontramos, una vez hecho esto, con una bonita expresión para $\boldsymbol{F}$:

$$\sum_{\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = \mu_0 J_{\lambda} \qquad \textbf{[6.2.21]}$$

"Pero a los físicos nos gustan más las ecuaciones simples y elegantes", así que la escribimos de esta manera:

$$\vec{\square} \cdot \boldsymbol{F} = \mu_0 \vec{J} \qquad \textbf{[6.2.22]}$$

Esta ecuación representa a las dos primeras ecuaciones de Maxwell, en lo que se llama **Formulación Covariante de las Ecuaciones de Maxwell**. Las otras dos ecuaciones de Maxwell vienen representadas, en la mencionada formulación, por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0 \qquad \textbf{[6.2.23]}$$

donde $\mu \neq \nu \neq \lambda$ representan tres de los subíndices 1, 2, 3 ó 4. Esta fórmula se deduce directamente de la expresión del tensor de campo electromagnético.

"Ahora, ya sabemos cómo se escriben las ecuaciones de Maxwell para que las coordenadas del espacio y del tiempo estén tratadas a un nivel equivalente tal como se hace en relatividad".

Lo que estas dos ecuaciones finales dicen es:

1. **La primera ecuación** ($\partial_{\nu} F^{\mu\nu} = \mu_0 J^{\lambda}$):

   Contiene la *Ley de Gauss* y la *Ley de Ampère-Maxwell*.

   Describe cómo las cargas y corrientes generan los campos.

2. **La segunda ecuación** (conocida como Identidad de Bianchi):

   Contiene la *Ley de Gauss para el magnetismo* y la *Ley de Faraday*.

   Describe la geometría intrínseca de los campos (ausencia de monopolos magnéticos).

II RELATIVIDAD GENERAL

1 Espacio-Tiempo y Geometría

1.1 Introducción

La Relatividad General sustituyó a la teoría de la Gravitación Universal de Newton dando cuenta de muchos efectos que no podían ser explicados, como las anomalías en la órbita de Mercurio y de otros planetas; también hace numerosas predicciones - ya confirmadas - sobre los efectos de la gravedad, como la curvatura de la trayectoria de la luz al pasar en las proximidades de objetos que generan campos gravitacionales intensos y los corrimientos al rojo de las ondas electromagnéticas también por causas gravitacionales.

La curvatura de la luz debido a la gravedad puede manifestarse en el curioso fenómeno de que en el cielo pueden observarse múltiples imágenes de un mismo objeto astronómico. Este efecto es conocido como *lente gravitacional* y su estudio hoy en día es parte importante de la astronomía.

Provee los fundamentos de nuestro actual entendimiento sobre los agujeros negros, que son regiones del espacio donde la atracción gravitacional es tan fuerte que ni siquiera la luz puede escapar de ella.

Se piensa que su inmensa gravedad es la responsable de la intensa radiación a base de chorros de partículas que se extienden por grandes distancias de hasta 5000 años luz emitida por ciertos tipos de objetos astronómicos como los núcleos galácticos activos o micro quásares.

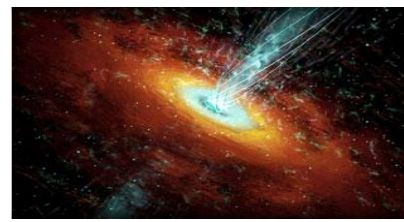


Figura 1.1.1: Núcleo galáctico activo.

A pesar de que la Relatividad General no es la única teoría relativista de la gravedad, es la más simple de ellas consistente con los datos observacionales y experimentales. Sin embargo, un gran número de preguntas se mantienen abiertas, la más fundamental es:

¿Cómo la Relatividad General puede reconciliarse con las leyes de la mecánica cuántica para producir una teoría consistente única de la Gravedad Cuántica?

La teoría ha llegado a ser una herramienta esencial de la Astrofísica moderna, la Cosmología (el estudio del Universo temprano y futuro), la Teoría de Cuerdas, el Modelo Estándar y hasta la Física de Partículas.

Además la relatividad general predice un nuevo fenómeno conocido como ondas gravitacionales; "evidencias indirectas" de estas ondas gravitacionales ya han sido comprobadas por varios equipos de científicos, como los proyectos LIGO y GEO 600.

1.2 El Principio de Equivalencia

El Principio de Equivalencia hace indistinguible a la gravedad localmente con una aceleración cualquiera. Además, permite extender el Principio de la Inercia a los espacios curvos; de manera que las fuerzas gravitacionales no son más que pseudo fuerzas que dependen del observador y de su marco de referencia.

De esa manera una curva parabólica producida por un lanzamiento de un objeto en un campo gravitacional es en realidad una geodésica en un espacio curvado en el que se preserva el principio de la inercia.

Einstein se dio cuenta de que la teoría de la relatividad especial era necesariamente incompatible con la gravedad newtoniana, por ser ésta última una interacción "instantánea" a distancia.

Sin embargo, no estaba claro cómo se podía incorporar la gravedad en la relatividad espacial, puesto que intrínsecamente trataba con observadores acelerados, por los que el Principio de la Relatividad no es válido.

Por otro lado, a Einstein le impresionó mucho la igualdad de la masa inercial y la masa gravitatoria. Aunque la mecánica newtoniana no daba ninguna razón a priori por la que estas dos cantidades físicas tuvieran el mismo valor, Einstein creía que esto no podía ser causalidad, sino que insinuaba una profunda propiedad de la Naturaleza.

Fue hasta 1907 que se aclaró el problema, en lo que Einstein mismo llamó *"la idea más feliz de mi vida"*, cuando se dio cuenta de que un observador en caída libre no siente su propio peso y por lo tanto podría pensar que estuviera en una región del espacio donde no hubiera campo gravitatorio.

Efectivamente, una bola soltada por un observador caerá debido a la universalidad de la caída libre a la misma velocidad que el propio observador, de modo que este último verá la bola flotando como si estuviera en el espacio interestelar.

Figura 1.2.1: Experimento pensado.

Por lo tanto, un observador en caída libre en un campo gravitacional constante, aunque no es un observador inercial en el sentido newtoniano, podría considerarse a sí mismo en reposo.

Y de una manera similar, un observador que estuviera en el espacio libre de atracción gravitacional pero sometido a una aceleración constante no podría distinguir la naturaleza de dicha aceleración

Principio de Equivalencia (para campos gravitatorios constantes): Un observador en caída libre en un campo gravitatorio constante es localmente equivalente a un observador inercial en ausencia de gravedad. Del mismo modo, si el observador tiene un movimiento uniformemente acelerado es localmente equivalente a un observador inercial en un campo gravitatorio constante.

¡Es imposible determinar la diferencia entre estas dos situaciones a base de experimentos físicos!

Así, lo que para un observador en un sistema de referencia es inercia, en otro sistema de referencia es gravedad. Esto explica la universalidad de la caída libre y el hecho de que no haya distinción entre masa inercial y masa gravitatoria.

El Principio de Equivalencia sólo es válido *localmente*; es decir, a escalas pequeñas, donde el cambio de coordenadas esté en un espacio-tiempo de Minkowsky. A escalas más grandes se puede ver la diferencia entre gravedad y aceleración debido a la inhomogenidad de los campos gravitatorios.

Observando con suficiente precisión un observador en caída libre verá que dos objetos lentamente se acercan, según vayan cayendo cada vez más, hacía el centro de la Tierra, una cosa que un observador inercial en el espacio interestelar no verá.

NOTA: Un astronauta no tiene peso en una órbita alrededor de la Tierra porque está continuamente en caída libre.

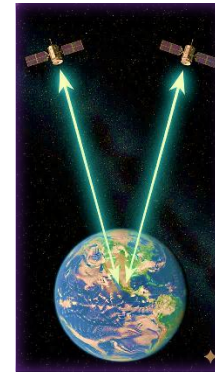


Figura 1.2.2:

Inhomogenidad del campo gravitacional.

En realidad, también se puede dar la vuelta al Principio de Equivalencia y decir que la fuerza gravitatoria en realidad no es más que la apreciación de un movimiento acelerado bajo la elección de unas coordenadas específicas. Efectivamente, la ecuación de movimiento de una partícula en caída libre en un campo gravitatorio constante viene dada por la segunda ley de Newton:

$$\ddot{x} = -g \qquad [1.2.1]$$

Sin embargo, por el Principio de Equivalencia podríamos tomar, localmente, el punto de vista de un observador en caída libre a través del cambio de coordenadas:

$$x' = x + \frac{1}{2}gt^2 \qquad \textbf{[1.2.2]}$$

De modo que en las coordenadas nuevas la ecuación de movimiento de la partícula viene dada por:

$$\ddot{x}' = 0 \qquad \textbf{[1.2.3]}$$

Vemos por lo tanto que en las coordenadas x'la ecuación de movimiento corresponde a la de una partícula libre. La fuerza gravitatoria ha sido eliminada por el cambio de coordenadas.

Las fuerzas que dependen del sistema de referencia y que desaparecen en los cambios de coordenadas, se suelen llamar en la mecánica clásica *pseudo-fuerzas*, como la fuerza centrífuga o la fuerza de coriolis.

Así que, lo que nos está diciendo el Principio de Equivalencia es que la gravedad no es una fuerza física, sino una fuerza aparente o pseudo-fuerza debida a la elección del sistema de referencia.

El cambio de coordenadas de la ecuación **[1.2.2]** sin embargo no es una transformación ortogonal, como las transformaciones de Lorentz, en realidad ni siquiera es una transformación lineal. Es un cambio general de coordenadas.

La ecuación de movimiento **[1.2.2]** no es la ecuación de una partícula libre en coordenadas cartesianas, sino en curvilíneas. Parece por lo tanto que coordenadas curvilíneas son de cierta manera más naturales para describir objetos en caída libre, ya que se ha eliminado con ellas la fuerza de la gravedad.

Sin embargo, el cambio de coordenadas será distinto en cada punto del espacio-tiempo y en general no será posible encontrar una transformación tal que el espacio entero se reduzca al espacio de Minkowsky; de modo que, lo más natural no son tanto las coordenadas curvilíneas, sino directamente los espacios curvos que pueden considerarse en cada punto, localmente planos o de Minkowsky, pero globalmente no.

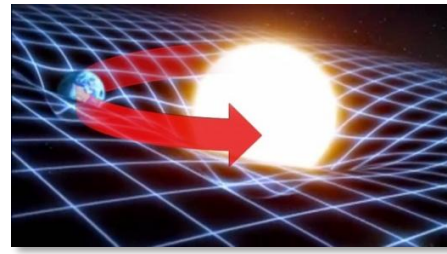


Figura 1.2.3: Atracción gravitacional debida a la curvatura del espacio-tiempo.

De hecho, de acuerdo a la Relatividad General, la atracción gravitacional observada entre masas se debe a una curvatura del espacio-tiempo y a la geometría del mismo y no a fuerzas a distancia; por lo que el espacio-tiempo de la relatividad general es una variedad lorentziana cuatridimensional con curvatura, donde las partículas libres viajan a lo largo de las geodésicas de la variedad curva

Las trayectorias de partículas libres en un espacio curvo son las geodésicas de la variedad. Sin embargo, un observador que insiste en utilizar las coordenadas de un espacio plano se ve obligado a invocar fuerzas de gravedad $\boldsymbol{F}$ ficticias para describir las aceleraciones observadas.

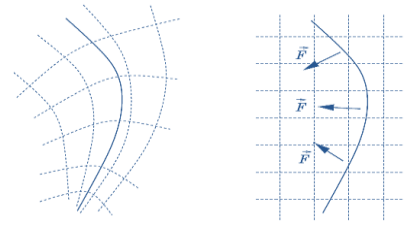


Figura 1.2.4: Trayectorias en el espacio.

Así, para Einstein, la partícula sigue una geodésica en el espacio-tiempo curvo:

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\, \dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\rho} = 0 \qquad \textbf{[1.2.1]}$$

En otras palabras, lo que para Newton es la fuerza gravitatoria a distancia $\boldsymbol{F}_{grav}/m$, es para Einstein es un término puramente geométrico, $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\, \dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\rho}$, debido a la curvatura del espacio.

Así, aunque en las coordenadas localmente inerciales, un observador tiene todo derecho a llamarse *observador inercial* y por lo tanto para él las leyes de la física tendrán la forma de las leyes de la relatividad especial, por lo menos localmente; el mismo observador podrá estudiar los fenómenos físicos en cualquier otro sistema de coordenadas y deberá llegar a las mismas leyes de la física, aunque escritas en coordenadas distintas.

Principio de Covariancia: Las leyes de la física deben tener la misma forma en todos los sistemas de referencia. Las leyes de la física deben por lo tanto transformar de manera covariante bajo cambios generales de coordenadas.

En la práctica esto implica que una ley es válida en general si es válida en relatividad especial y si la escribimos de manera covariante; es decir, en función de objetos que transformen bien bajo cambios generales de coordenadas. En particular, sustituyendo las derivadas parciales por derivadas covariantes y la métrica $\eta_{\mu\nu}$ por una métrica general $g_{\mu\nu}$.

1.3 Curvatura y el Tensor de Riemann

Al final de cuentas los buenos deseos de Albert Einstein de escribir las ecuaciones de movimiento en las proximidades de cuerpos masivos que curvan el espacio parecían más Ciencia Ficción que una posibilidad real de cálculo con sus habilidades matemáticas.

Sin embargo, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) en su breve vida de tan solo 39 años se doctoró como alumno de Gauss y creó la geometría diferencial en la que estableció las proposiciones básicas de la geometría no euclidiana para variedades n-dimensionales.

Con esta herramienta matemática Einstein puso sólidos cimientos para su geometría relativista en espacios curvos.

Variedad diferenciable: es un espacio con complejidad topológica, pero con propiedades locales de $\mathbb{R}^n$: $(x_1, \dots, x_n)$; donde se pueden extender las nociones de cálculo diferencial, manteniendo inalteradas sus propiedades geométricas mediante transformaciones continuas sin modificar su dimensionalidad.

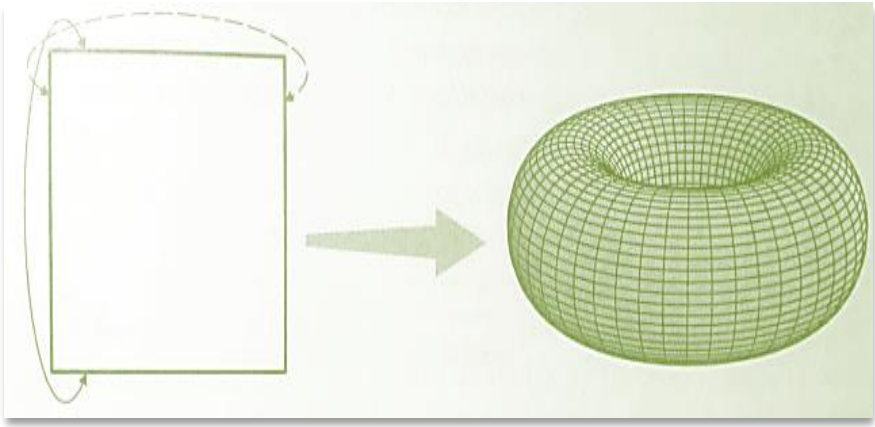


Figura 1.3.1: Construcción del Toro.

Una variedad es una curva si el transporte paralelo de un vector a través de una trayectoria cerrada perteneciente a la superficie geométrica resulta ser un vector diferente al volver al punto de partida.

Transporte Paralelo: Para definir bien de manera cuantitativa la curvatura de una variedad consideramos el transporte paralelo de un vector a lo largo de un paralelogramo infinitesimal cuyos lados consisten en los vectores dx^{μ} y dx^{ν}, mediante un desplazamiento infinitesimal en las direcciones x^{μ} y x^{ν} respectivamente.

En particular, calculamos la diferencia entre trasladar el vector V^{λ} primero a lo largo de dx^{μ} y luego a lo largo de dx^{ν}; y compararlo cuando se traslada primero por dx^{ν} y después por dx^{μ}.

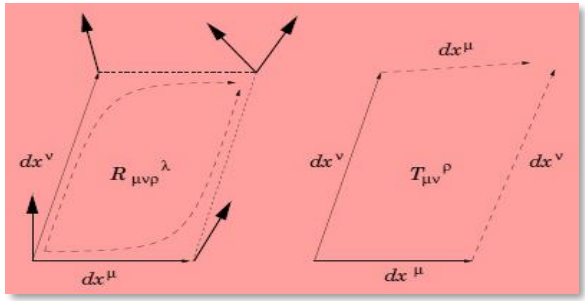


Figura 1.3.2: El tensor de Riemann y el tensor de torsión. El tensor de Riemann $R^{\lambda}_{\mu\nu\rho}$ mide la diferencia en el transporte paralelo de un vector en un paralelogramo infinitesimal y es una medida de la curvatura encerrada en el paralelogramo. El tensor de torsión $T^{\rho}_{\mu\nu}$ es la parte antisimétrica de la conexión y mide hasta qué punto el paralelogramo está cerrado.

NOTA: En regiones pequeñas es independiente del sistema de coordenadas utilizado.

En otras palabras, tenemos que calcular el conmutador de las derivadas covariantes $[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] = \nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}$ actuando sobre el vector V^{ρ}.

En un primer paso se calcula:

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}V^{\rho} = \partial_{\mu}\partial_{\nu}V^{\rho} + \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}V^{\rho} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\partial_{\nu}V^{\rho} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}V^{\rho} \qquad [1.3.1]$$

Si pues,

$$\nabla_{\nu}V^{\rho} = \left[\partial_{\nu} + \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\right]V^{\rho} \qquad [1.3.2]$$

Y

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} = \partial_{\mu}\left[\partial_{\nu} + \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\right] + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\left[\partial_{\nu} + \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\right] \qquad [1.3.3]$$

De modo que el conmutador viene dado por:

$$\left[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}\right]V^{\rho} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}V^{\rho} - T^{\rho}_{\mu\nu}\nabla_{\rho}V^{\rho} \qquad [1.3.4]$$

Donde,

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \qquad [1.3.5]$$

Y

$$T^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \qquad [1.3.6]$$

Así, en general para un tensor de rango $S^{\mu\nu}$, se tiene que:

$$\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] S^{\rho\lambda} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} S^{\rho\sigma} + R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu} S^{\sigma\lambda} - T^{\sigma}_{\mu\nu} \nabla_\sigma S^{\rho\lambda} \qquad \textbf{[1.3.7]}$$

Vemos que, en contraste con las derivadas parciales, el conmutador de dos derivadas covariantes no es cero, sino que consiste en dos partes:

1. Una parte es proporcional a vector V^ρ, donde el factor de proporcionalidad $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ es el tensor de Riemann. Esta parte mide la diferencia entre el transporte paralelo de V^ρ por una trayectoria y por otra, y es por lo tanto una medida de la curvatura del espacio encerrado en el paralelogramo.

   En particular, si el tensor de Riemann es cero, el transporte paralelo de un vector no depende de la trayectoria, lo que implica que la variedad es plana. Por otro lado, una variedad tiene curvatura si por lo menos una componente de $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ es distinta de cero.

2. La segunda parte es proporcional a la derivada covariante de V^ρ y el factor de proporcionalidad $T^{\rho}_{\mu\nu}$ es la parte antisimétrica de la conexión, llamado el tensor de torsión.

   El tensor de torsión mide el grado en que cierra el paralelogramo, es decir si las dos trayectorias $dx^\mu - dx^\nu$ y $dx^\nu - dx^\mu$ llevan al mismo punto. Si nos restringimos a conexiones simétricas (una de las condiciones para la conexión de Levi-Civita), el tensor de torsión es cero y las trayectorias $dx^\mu - dx^\nu$ y $dx^\nu - dx^\mu$ formarán un paralelogramo cerrado.

1.4 La Métrica

Después de Calcular el Tensor de Curvatura de Riemann y algunas de sus propiedades finalmente podemos escribir la primera parte del Tensor de Einstein.

Para Einstein constituyó una poderosa herramienta matemática, después de cartearse con su amigo matemático Levi-Civita, llegó a profundizar de tal forma en estos elementos de geometría diferencial que su teoría se pudo formular de una forma elegante y bella.

En esta primera parte de la ecuación, la única diferencia entre el tensor de Einstein y el tensor de Ricci estriba en la diagonal principal, a la cual se le resta a cada uno de sus componentes la mitad del escalar de Ricci. Esta parece una diferencia mínima. Y, sin embargo, es justo lo que se requiere para que la ecuación tensorial de la Relatividad General pueda ser utilizada para analizar y predecir fenómenos físicos reales.

Como que el tensor de Ricci es un tensor simétrico, y puesto que el tensor de Einstein lo único que hace es modificar las entradas en la diagonal principal, el tensor de Einstein también es un tensor simétrico, donde G es esencialmente un tensor mixto de orden dos, y tan solo expresa la curvatura del espacio-tiempo de una manera que es consistente con la conservación de la energía y el momento.

La curvatura de una variedad se manifiesta en el hecho de que un vector no es invariante bajo transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada. Pero el transporte paralelo viene dado por la conexión $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$. Elecciones diferentes para la conexión llevan a diferentes expresiones para el tensor de Riemann, y por lo tanto a diferentes valores de la curvatura. Por otro lado, la métrica de la variedad es una herramienta para medir las distancias entre puntos, pero no dice nada sobre cómo transportar vectores.

La Conexión de Levi-Civita: Se deriva de la métrica y satisface dos condiciones:

1. La conexión es simétrica: $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}$.
2. La derivada covariante de la métrica es cero: $\nabla_{\mu} g_{\nu\rho} = 0$.

La primera condición implica que el tensor de torsión e cero; es decir, $T^{\rho}_{\mu\nu} = 0$. Así que el conmutador de dos derivadas covariantes viene dado sólo por el tensor de Riemann:

$$\left[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}\right] V^{\lambda} = R^{\lambda}_{\mu\nu\rho} V^{\rho} \qquad \textbf{[1.4.1]}$$

La segunda condición implica que la norma de un vector no cambia al hacer transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada.

Como la conexión de Levi-Civita es determinada de manera única por la métrica, juega un papel fundamental en la Relatividad General.

Propiedades del Tensor de Riemann: De modo que utilizando la conexión de Levi-Civita se pueden obtener las siguientes propiedades para el tensor de Riemann:

i) $$R_{\mu\nu\rho\lambda} = g_{\lambda\sigma} R^{\sigma}_{\mu\nu\rho} \qquad \textbf{[1.4.2]}$$

El tensor de Riemann es antisimétrico en los primeros dos índices:

ii) $$R_{\mu\nu\rho\lambda} = -R_{\nu\mu\rho\lambda} \qquad \textbf{[1.4.3]}$$

El tensor de Riemann también es antisimétrico en los dos últimos índices:

iii) $$R_{\mu\nu\rho\lambda} = -R_{\mu\nu\lambda\rho} \qquad \textbf{[1.4.4]}$$

Y es simétrico bajo el intercambio de los primeros dos índices con los últimos dos:

iv) $$R_{\mu\nu\rho\lambda} = R_{\rho\lambda\mu\nu} \qquad \textbf{[1.4.5]}$$

De las propiedades ii) a iv) anteriores fácilmente se obtiene que:

v) $$R_{\mu\nu\rho\lambda} + R_{\mu\rho\lambda\nu} + R_{\mu\lambda\nu\rho} = 0 \triangleq R_{\rho[\mu\lambda\nu]} \qquad \textbf{[1.4.6]}$$

Estas condiciones reducen el número de grados de libertad o componentes independientes del tensor de Riemann. Un cálculo combinatorio muestra que el tensor de Riemann en N dimensiones tiene $N^2(N^2-1)/12$ grados de libertad, lo que en $N = 4$ corresponde a 20, lo que son justo las 20 derivadas segundas de la métrica $\partial_\mu \partial_\nu g_{\rho\lambda}$ por lo que no se pueden igualar a cero.

Identidad de Bianchi: El tensor de Riemann satisface la ecuación diferencial:

$$\nabla_\mu R_{\nu\rho\lambda\sigma} + \nabla_\nu R_{\rho\mu\lambda\sigma} + \nabla_\rho R_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0 \qquad \textbf{[1.4.7]}$$

Tensor de Ricci: Contracción del segundo índice del tensor, con el cuarto:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = g^{\rho\lambda} R_{\mu\rho\nu\lambda} \qquad \textbf{[1.4.8]}$$

Que es la única contracción no trivial, al usar la conexión de Levi-Civita.

Escalar de Ricci: Contrayendo los índices del tensor de Ricci se obtiene:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \qquad \textbf{[1.4.9]}$$

Que es un invariante ante cambios de coordenadas.

Tensor de Einstein: juega un papel de gran importancia en la Relatividad General:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \qquad \textbf{[1.4.10]}$$

Una de las propiedades del tensor de Einstein es que su divergencia es cero. Contrayendo la identidad de Bianchi **[1.4.7]** con $g^{\rho\sigma}$ y $g^{\mu\lambda}$ se obtiene una relación diferencial entre el tensor de Ricci y el escalar de Ricci:

$$\nabla_\mu R^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu R \qquad \textbf{[1.4.11]}$$

Ahora, calculando la divergencia de $G_{\mu\nu}$ se tiene que:

$$\nabla_\mu G^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\sigma} \nabla_\mu \left(R_{\nu\rho} - \frac{1}{2} g_{\nu\rho} R \right) = \nabla_\mu R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu R = 0 \qquad \textbf{[1.4.12]}$$

Esta propiedad juega un importante papel en la construcción de las ecuaciones del campo gravitacional.

2 Las Ecuaciones de Einstein

2.1 Formulación Gravitacional Generalizada

Tal vez la síntesis más importante de Einstein sobre la geometría del espacio-tiempo curvo consista en sustituir al Potencial Gravitacional por el Tensor Métrico y la Densidad de Masa por el Tensor de Energía Momento.

Así finalmente Einstein logra dar el gigantesco paso para construir su Ecuación de Campo con la cual asocia a la masa la curvatura del espacio-tiempo, ahora responsable de la Gravitación.

Ya anteriormente había descubierto la equivalencia entre la masa y la energía, $E <-> m$; y ahora logra equiparar la masa gravitacional (o inercial) con la curvatura del espació-tiempo, $G <-> T$.

Así quedan unificados estos tres conceptos: Energía, Masa y Curvatura del Espacio-Tiempo, lo que nos permite comprender que son tres manifestaciones diferentes pero equivalentes del propio Universo.

Ahora podemos decir: la masa, la energía y la curvatura del espacio-tiempo no se crean ni se destruyen solo se transforman unas en otras...

Principio de Equivalencia nos da una manera heurística para describir el campo gravitatorio, como la curvatura del espacio. Pero aún no hemos establecido todavía qué es lo que curva el espacio. De la gravedad newtoniana sabemos que la fuente de la fuerza gravitatoria es la masa de los objetos en el espacio, así que cabe esperar que sea la materia la que curva el espacio. Esto es verdad, aunque no es la única fuente de curvatura.

La relatividad especial nos enseña que la masa de un objeto es sólo una de las posibles manifestaciones de la energía y que es posible convertir una cosa en la otra, a través de la relación $E = mc^2$. Por ejemplo, la masa de un núcleo de helio es menor que la suma de las masas de sus componentes (2 protones y 2 neutrones), siendo la diferencia la energía que se libera en un proceso de fusión nuclear (y neutrinos).

Considerando la fórmula general de la gravitación de la ley de Newton:

$$F = \frac{GM}{r^2} \qquad \textbf{[2.1.1]}$$

Donde G desde luego, es la constante gravitacional. Integrando el flujo de F hacia afuera de la esfera centrada en la masa:

$$\int F \cdot ds = -4\pi r^2 \frac{GM}{r^2} = -4\pi GM \qquad \textbf{[2.1.2]}$$

Y según el *Teorema de Stokes*:

$$\int F \cdot ds = \int \nabla \cdot F dV \qquad \textbf{[2.1.3]}$$

Al reemplazar se tiene:

$$\int \nabla \cdot F dV = -4\pi GM = -4\pi G \int \rho dV \qquad \textbf{[2.1.4]}$$

$$\therefore \qquad \nabla \cdot F = \rho \qquad \textbf{[2.1.5]}$$

De modo que, en términos del potencial gravitacional, haciendo $F = -\nabla\Phi$, se tiene que:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho \qquad \textbf{[2.1.6]}$$

Que es la conocida ecuación de Poisson que mide la distribución de la masa en un potencial gravitacional. Donde, $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$ es el Laplaciano en el espacio (plano y euclídeo), Φ es el potencial gravitacional, G es la constante gravitacional y ρ es la densidad de masa.

NOTA: Esta expresión para el caso newtoniano es equivalente a su análogo electromagnético donde $E = -\nabla V$ y $\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$. Cuando $\rho = 0$ se tiene entonces la ecuación de Laplace para un potencial constante o conservativo: $\nabla^2\Phi \triangleq \triangle\,\Phi = 0$.

Ecuación de Campo de Einstein: La ecuación de Einstein explica como la métrica responde a la energía y al momentum de un sistema de partículas permitiendo obtener una generalización de la ecuación de Poisson en la que reemplazará el potencial gravitacional por el Tensor Métrico y la densidad de masa por el Tensor de Energía Momento. De modo que se tiene:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad \textbf{[2.1.7]}$$

En esta ecuación el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ describe la geometría, el tensor y escalar de Ricci están referidos a las segundas derivadas de la métrica y el Tensor de Energía Momento describe la distribución de la energía.

El Tensor de Energía Momento: Describe el flujo de energía y momento lineal de una distribución continua de materia; es decir, generaliza la densidad de masa y equivale a un tensor de esfuerzo de rango 2 que mide el momento a través de una superficie:

$$\boldsymbol{T} = T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \qquad \textbf{[2.1.8]}$$

Así, $T^{\alpha\beta}$ representa el flujo de momento α a través una superficie β constante.

En donde ρ es la densidad de masa (energía) del "fluido" (la componente T^{00} en este caso) en kilogramos por metro cúbico y p es la presión ejercida por el fluído en la dirección especificada (las componentes T^{11}, T^{22}, T^{33}) en newtons por metro cuadrado.

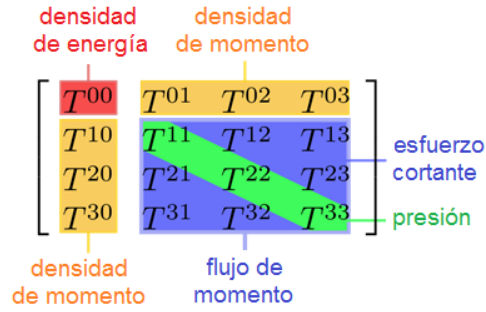


Figura 2.1.1: Interpretación del Tensor $T_{\mu\nu}$.

La conservación del momento se expresada por la condición: $\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0$

Con,

$$p^{\mu} = \frac{1}{c}\int_{V} T^{0\mu}\, d^3x \qquad \textbf{[2.1.9]}$$

Donde,

$$p = m\boldsymbol{v} = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \qquad \textbf{[2.1.10]}$$

Podemos considerar que este tensor $\boldsymbol{T}$ describe a una colección de partículas en reposo desde algún sistema de referencia, y que desde otros sistemas de referencia inerciales "fluyen" sin impedimento mecánico alguno, sin fuerzas de fricción internas.

Específicamente, estamos hablando de un "fluido perfecto" haciendo una generalización del concepto del gas ideal usado en la termodinámica.

Para un fluido perfecto, en el cual no hay rozamientos o viscosidades o fricciones internas ni transferencias de calor, en el marco de referencia en el cual está instantáneamente en reposo, las componentes $T_{0i} = T_{i0}$ del tensor $\boldsymbol{T}$ tendrán el valor cero, ya que la energía puede fluir de un lado a otro únicamente si las partículas pueden fluir también.

En lo que respecta a la ausencia de viscosidad, esto significa que las fuerzas deben ser siempre perpendiculares a la superficie que lo contiene, así que todos los términos espaciales T_{ij} del tensor $\boldsymbol{T}$ en que $i \neq j$ deben ser cero, lo cual implica a la vez que $\boldsymbol{T}$ debe ser una matriz diagonal.

Y puesto que la ausencia de viscosidad es algo que debe ser independiente las coordenadas, la matriz debe seguir siendo diagonal para todos los marcos de referencia inerciales del fluido; pero la única matriz que puede permanecer diagonal en cualquier marco de referencia debe ser un múltiplo de la matriz identidad, por lo tanto, todos los términos diagonales del Tensor Energía Momento deben ser iguales.

Para un fluido perfecto contenido en una superficie, en la orientación X sólo tendrá sobre esta una fuerza, y lo mismo se puede decir para las otras dos orientaciones de la superficie. Estas fuerzas por unidad de área, que deben ser todas iguales en un fluido perfecto, es lo que llamamos *presión*. De este modo, tenemos que para las componentes espaciales del tensor $\boldsymbol{T}$ se debe tener $T_{ij} = p\delta_{ij}$ en donde p es la presión y δ_{ij} es la delta Kronecker.

NOTA: El tensor de Energía Momento obviamente se anula en ausencia de materia.

Las Ecuaciones de Campo de Albert Einstein no solo explican la gravedad como una consecuencia de la curvatura del espacio causada por las masas, también tienen un buen número de consecuencias.

La inclusión de una Constante Cosmológica para balancear el término de curvatura con en el de energía y lograr un universo "estático" fue considerada inicialmente errónea ya que las mediciones del corrimiento al rojo galáctico medido por Hubble evidenciaban la expansión del Universo.

Con el descubrimiento de la Energía Oscura causante de la expansión acelerada del Universo, estas Ecuaciones de Campo incluyendo el término cosmológico han vuelto a captar el interés de la comunidad científica ya que es un término que "naturalmente" permite añadir a las ecuaciones de campo una dinámica con los cual puede describirse la evolución del universo en sus diferentes etapas que es el objeto de estudio de la Cosmología moderna.

Fuente de Curvatura: En la ecuación de campo de la métrica de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = KT_{\mu\nu} \qquad \textbf{[2.1.11]}$$

El Tensor de Energía Momento, también conocido como Tensor de Energía Tensión, actúa como la fuente de la curvatura del espacio-tiempo, de modo que, dado $T_{\mu\nu}$, se puede encontrar $g_{\mu\nu}$, y una vez conocido $g_{\mu\nu}$ se puede calcular la trayectoria de una partícula libre (geodésica).

Cualquier fuente de energía, trátese de energía nuclear, energía solar, lo que sea, todo ello tendrá su propio Tensor de Energía Momento, y el efecto total combinado sumado tensorialmente (componente a componente).

Esto es lo que producirá la curvatura geométrica del espacio-tiempo que significa que el tensor $\boldsymbol{T}$ en las ecuaciones de campo de la Relatividad General es en realidad una suma de tensores, todos ellos expresados necesariamente en el mismo sistema de coordenadas (y desde luego en el mismo sistema de unidades), de modo tal que las ecuaciones de campo de la Relatividad General son realmente:

$$G_{\mu\nu} = K(\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2 + \boldsymbol{T}_3 + \cdots) \qquad \textbf{[2.1.12]}$$

Sin embargo, y para fines prácticos, podemos limitarnos a trabajar con el tensor que hemos estudiado aquí, porque es el único que a fin de cuentas produce una curvatura apreciable que puede ser confirmada a través de las observaciones astronómicas.

Ejemplo: ¿Cuál será la representación del tensor relativista energía tensión a escala astronómica para un fluido no relativista como una nebulosa o una estrella de secuencia principal?

En un fluido no relativista como una nebulosa o una estrella de la secuencia principal, todos los componentes del tensor de energía-tensión son nulos o de muy poca importancia, salvo el elemento T^{00} que corresponde a la densidad de masa-energía y que es el único que contribuye sensiblemente a la atracción gravitatoria y a la curvatura del espacio-tiempo.

Figura 2.1.2: Nebulosa planetaria.

Si queremos medir la contracción de volumen producida por la masa-energía presente en una determinada región, tenemos que aplicar las ecuaciones de campo dadas por la fórmula tensorial de la Relatividad General. ■

Propiedades del tensor de Einstein:

1. $G_{\mu\nu}$ tiene que ser simétrico en los dos índices, ya que $T_{\mu\nu}$ también lo es.
2. $G_{\mu\nu}$ tiene que ser un objeto puramente geométrico. Por lo tanto, tiene que ser una función solamente de la métrica $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas.
3. El Principio de Equivalencia implica que $G_{\mu\nu} = 0$ en el espacio plano.
4. La ley de conservación de energía $\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0$ implica que $\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0$.
5. Se puede identificar la componente g^{00} de la métrica con el potencial gravitacional newtoniano. Para tener una teoría dinámica y recuperar la ecuación de Poisson, $G_{\mu\nu}$ debe contener segundas derivadas de la métrica, lo que se consigue a través de contracciones del tensor de Riemann $R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$.

Las ecuaciones de Einstein forman un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas de segundo orden, pero la condición $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ impone 4 ligaduras, de modo que sólo 6 ecuaciones son realmente independientes, las otras 4 componentes son componentes no-físicas que expresan la libertad de elección del sistema de coordenadas, posibilitando los cambios de coordenadas $x^\mu \to y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$.

De cualquier manera, son muy difíciles de resolver analíticamente y en realidad, no hay técnicas conocidas para obtener una solución general. Todas las soluciones conocidas son casos con mucha simetría u obtenidas a través de técnicas específicas.

2.2 Teoría de Campo Generalizada

La gran diferencia conceptual entre las ecuaciones de Einstein y la teoría newtoniana de la gravedad es que las ecuaciones de Einstein describen la gravedad como una teoría de campo mientras que la teoría newtoniana postula un espacio y tiempo absolutos donde existen fuerzas que actúan a distancia.

El concepto de campo físico fue introducido por Michael Faraday (1791 - 1869) y aprovechado por Maxwell en el contexto del electromagnetismo, para resolver el problema de acción a distancia. Donde en la ley de Newton o de Coulomb las partículas tienen interacciones (gravitacionales o electromagnéticas) a distancia, en una teoría de campos las partículas interaccionan indirectamente, a través de un campo que se extiende por el espacio y que sirve de intermediario para la interacción entre las partículas. Una perturbación se transmite a través del campo a velocidad finita (la velocidad de la luz en el caso del electromagnetismo y la gravedad). De este modo la relatividad general resuelve el problema de acción inmediata y a distancia de la gravedad newtoniana.

El Espacio Tiempo Dinámico: Existe una gran diferencia conceptual entre la teoría de Maxwell y la Relatividad General. En la teoría de Maxwell el campo intermediario es el campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ que se extiende en un espacio tiempo específico, generalmente Minkowsky (aunque no necesariamente).

Sin embargo, en Relatividad General, el campo intermediario es justamente la métrica $g_{\mu\nu}$, el tensor que resume todas las propiedades geométricas del espacio tiempo.

Así, para la Relatividad General el espacio tiempo es algo dinámico, que interacciona con la materia y consigo mismo, lo que además implica que la geometría no está fija y a priori determinada.

En contraste con la teoría de Maxwell (o sus generalizaciones, como Yang-Mills o el Modelo Estándar), en Relatividad General el espacio tiempo no es un escenario estático dentro del cual ocurre la física, sino que es una parte activa. En cierto modo, en la Relatividad Especial el espacio de Minkowsky era un espacio tiempo absoluto, en el sentido de que cualquier observador legítimo (es decir inercial) veía el espacio como Minkowsky. Aquí la geometría no está determinada a priori, sino por el contenido de energía y materia y por las condiciones iniciales. Donde la relatividad especial eliminó el espacio y el tiempo absoluto, la Relatividad General acabó con la idea del espacio tiempo estático y la geometría dada a priori.

La Constante Cosmológica: Einstein la introdujo al interesarse por la cosmología, con el fin de obtener un universo estático y aunque posteriormente la consideró "*el gran error de su vida*" una vez que el corrimiento observado por Edwin Hubble sugirió que el universo no es estático, el descubrimiento de la aceleración cósmica en los 90 ha renovado el interés en la constante cosmológica.

El valor de la constante cosmológica no está determinado por la teoría y representa una fuerza universal repulsiva si $\Lambda > 0$ y atractiva si $\Lambda < 0$. En la actualidad se le puede interpretar como la energía del vacío y muchas veces se le considera parte del Tensor de Energía Momento, más que de la parte geométrica de la ecuación de Einstein.

Efectivamente el Tensor de Energía Momento correspondiente será:

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = \Lambda g_{\mu\nu} \qquad \textbf{[2.2.1]}$$

En otras palabras, corresponde a un fluido perfecto con $\Lambda = \rho = -P$. Observaciones cosmológicas recientes parecen sugerir que en nuestro universo la constante cosmológica tiene un pequeño valor positivo y forma un 70% del contenido de energía del universo.

2.3 Física en espacios curvos

Las ecuaciones de Einstein nos dicen cómo la materia y la energía determinan la curvatura del espacio tiempo, pero no dicen nada sobre la dinámica de la materia y los campos no-gravitacionales. Obsérvese que **[2.1.7]** es una ecuación diferencial para $g_{\mu\nu}$, donde $T_{\mu\nu}$ aparece como un término inhomogéneo, no como algo dinámico. Por ello, se requiere una generalización a espacios curvos de la dinámica relativista de la, es decir de la Segunda Ley de Newton y de la teoría de Maxwell.

Principio del Mínimo Acoplamiento: Las leyes de la física en espacios curvos son los mismos que las de relatividad especial, donde se sustituyen las derivadas parciales ∂_μ por covariantes ∇_μ y la métrica de Minkowsky $\eta_{\mu\nu}$ por una métrica general $g_{\mu\nu}$.

Aunque no hay una razón física fundamental que justifique este principio, parece razonable por su sencillez. Sin embargo, debe aplicarse con cuidado ya que por ejemplo, en el espacio de Minkowsky el operador $\partial_\mu\partial_\nu$ es indistinto en cuanto al orden de las derivadas, pero al sustituirlas por derivadas covariantes si hay diferencia entre $\nabla_\mu\nabla_\nu$ y $\nabla_\nu\nabla_\mu$. Aun así, el Principio de Mínimo Acoplamiento es aplicable en la mayoría de los casos.

Segunda Ley de Newton: Para una partícula libre, la ley $\ddot{x}^\mu = 0$ se convierte en:

$$\frac{\nabla}{d\tau}\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) \equiv \ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\upsilon\rho}\dot{x}^\upsilon\dot{x}^\rho = 0 \qquad \textbf{[2.3.1]}$$

Lo que justamente es una ecuación para una geodésica.

En otras palabras: en un espacio curvo, una partícula sobre la cual no actúa ninguna fuerza aparte de la gravedad (es decir, una partícula libre) se mueve a lo largo de las geodésicas del espacio.

Si la partícula si está sometida a fuerzas externas f^μ (no-gravitacionales), la segunda ley de Newton tiene la forma:

$$\left(\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\upsilon\rho}\dot{x}^\upsilon\dot{x}^\rho\right) = f^\mu \qquad \textbf{[2.3.2]}$$

Las Leyes de Maxwell: La teoría electromagnética también se puede generalizar a espacios curvos; las leyes de Maxwell vienen dadas por las expresiones:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \qquad \nabla_\mu F_{\nu\rho} + \nabla_\rho F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\rho\mu} = 0 \qquad \textbf{[2.3.3]}$$

Aunque la simetría de la conexión de Levi-Civita y la antisimetría de $F_{\mu\nu}$ permiten rescribirlas como:

$$\partial_\mu\left[\sqrt{|g|}F^{\mu\nu}\right] = \sqrt{|g|}J^\nu, \quad \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0 \qquad \textbf{[2.3.4]}$$

Donde $|g|$ es el valor absoluto del determinante de la métrica.

La ecuación homogénea sugiere que el tensor electromagnético sigue teniendo la misma forma con derivadas parciales el potencial eléctrico A_μ, de modo que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, debido a la simetría y antisimetría de la conexión y el tensor electromagnético se tiene:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\mathrm{A}_\rho - \partial_\nu A_\mu + \Gamma^\rho_{\upsilon\mu}\mathrm{A}_\rho = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad \textbf{[2.3.5]}$$

3 La Solución de Schwarzschild

3.1 Métrica de Schwarzschild

La Métrica de Schwarzschild es una de las "pocas" soluciones simples y exactas a las ecuaciones de Einstein. Representan muy bien los espacios curvados por estrellas como nuestro Sol y aun por estrellas más grandes y hasta hoyos negros.

Es interesante imaginar un cubo conteniendo a una estrella. Si en cada una de sus caras dibujamos equipotenciales podemos notar que en caso de colapsar la estrella y formar una estrella de neutrones o un agujero negro las equipotenciales gravitacionales en las caras del cubo ¡no cambian!

Lo anterior conduce a una conclusión muy simple e importante: En un hoyo negro toda la masa de la estrella original se ha colapsado en su interior generando una gran curvatura espacial hacia el centro del objeto. De ninguna manera un hoyo negro es un agujero que pueda llevarnos o ningún otro lado del espacio-tiempo, un hoyo negro no es un túnel ni nada por el estilo, solo es un lugar donde la masa de una estrella se ha colapsado a niveles en los que el concepto de materia atómica deja de tener sentido.

La solución de Schwarzschild (1916) a las ecuaciones de campo de Einstein debe ser considerada el más importante logro de la Relatividad General en el campo de la Mecánica Celeste, porque es una solución exacta que se corresponde históricamente con el resultado Newtoniano de la inversa del cuadrado de la fuerza de atracción universal de la teoría gravitacional clásica.

Las ecuaciones de campo de Einstein para el espacio libre son no-lineales, por lo que no admiten el principio de superposición; de modo que son muy complicadas, siendo difícil obtener soluciones exactas. Hay, sin embargo, un caso especial que puede resolverse sin muchas dificultades, **el caso de un campo esférico estático** producido por un cuerpo esféricamente simétrico en reposo.

Así pues, es posible encontrar la solución para un campo gravitacional esférico, como es el caso de las soluciones exteriores para un espacio vacío en torno al Sol, la Tierra, etc. Las soluciones interiores son un poco más complejas; como cuando se tratan hoyos negros.

Se plantea como única solución posible de un espacio vacío, esférico y estático; es decir que se puede describir con un sistema de coordenadas para el cual la métrica es independiente de la coordenada temporal.

En coordenadas esféricas (t, r, θ, φ) la métrica viene dada por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad \textbf{[3.1.1]}$$

Según se prueba a continuación y donde, G es la constante gravitacional, M la masa del objeto y $d\Omega^2 = d\theta^2 + sen^2\theta\, d\varphi^2$ la métrica de la esfera unitaria.

En ausencia de energía y materia, el Tensor de Energía Momento $T_{\mu\nu}$ es cero de modo que la solución de ecuación de Einstein para el vació (igualando a cero la constante cosmológica) es:

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad \textbf{[3.1.2]}$$

Habiendo supuesto que en esta solución no hay términos cruzados de la forma $dtdx^i$ o $dx^i dt$, ya que la presencia de estos términos rompería la invariancia de $t \to -t$ de la solución estática. Además, la simetría esférica4 implica que el espacio tiene una simetría $SO(3)$; es decir, que es invariante bajo rotaciones ortogonales en tres dimensiones.

Deducción de la Métrica de Schwarzschild:

Paso 1: Tomando la métrica esférica de Minkowsky $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$, entonces se tiene:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad \textbf{[3.1.3]}$$

Paso 2: Las ecuaciones de Einstein son demasiado difíciles de resolver directamente, pero gracias a la simetría de la solución de Schwarzschild se puede plantear una propuesta multiplicando todos los términos por un coeficiente independiente del tiempo, una función exponencial que se reduzca a la unidad para valores grandes de la variable independiente, con la ventaja adicional de que su derivada es la misma función, salvo por el signo.

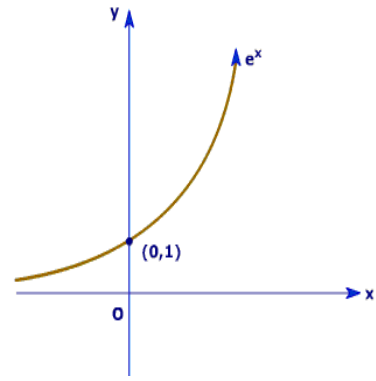


Figura 3.1.1: Función exponencial.

Así se puede garantizar que sus propiedades no se afecten. De modo que se puede escribir sin pérdida de generalidad:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2 \qquad \textbf{[3.1.4]}$$

Los exponenciales (con coeficiente 2 porque todos los otros términos están elevados al cuadrado) son para que la métrica no pierda sus propiedades, en este caso esféricas. Las funciones $\alpha(r)$, $\beta(r)$ y $\gamma(r)$ por determinar deben hacerse cero a grandes distancias.

Definiendo, $\boldsymbol{r} = e^{\gamma(r)}r$, con la base asociada:

$$d\boldsymbol{r} = e^{\gamma}dr + e^{\gamma}rd\gamma = \left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)e^{\gamma}dr \qquad \textbf{[3.1.5]}$$

En términos de esta nueva variable, la métrica toma la forma:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + \left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)}d\boldsymbol{r}^2 + \boldsymbol{r}^2 d\Omega^2 \qquad \textbf{[3.1.6]}$$

Paso 3: Renombrando $\boldsymbol{r} \to r$ y haciendo $\left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} \to e^{2\beta(r)}$, lo cual es válido ya que son simplemente "etiquetas".

$$\Longrightarrow \qquad ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad \textbf{[3.1.7]}$$

Paso 4: Con esta métrica y la Ecuación de Einstein se encuentran los coeficientes $\alpha(r)$ y $\beta(r)$, para lo cual se evalúan los símbolos de Christoffel, $(t, r, \theta, \varphi) \leftrightarrow (0,1,2,3)$:

$$\begin{array}{lll} \Gamma^t_{tr} = \partial_r\alpha & \Gamma^r_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)}\partial_r\alpha & \Gamma^r_{rr} = \partial_r\beta \\ \Gamma^\theta_{r\theta} = 1/r & \Gamma^r_{\theta\theta} = -re^{-2\beta} & \Gamma^\varphi_{r\varphi} = 1/r \\ \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -re^{-2\beta}sen^2\theta & \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -sen\,\theta\cos\theta & \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \cos\theta\,/sen\,\theta \end{array} \qquad \textbf{[3.1.8]}$$

Todos los otros son cero o están relacionados con los anteriores dada sus simetría.

De los anteriores se obtienen las componentes no nulas del tensor de Riemann:

$$\begin{array}{ll} R^t_{rtr} = \partial_r\alpha\,\partial_r\beta - \partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2 & R^r_{\theta r\theta} = re^{-2\beta}\partial_r\beta \\ R^t_{\theta t\theta} = -re^{-2\beta}\partial_r\alpha & R^r_{\varphi r\varphi} = re^{-2\beta}sen^2\theta\,\partial_r\beta \\ R^t_{\varphi t\varphi} = -re^{-2\beta}sen^2\theta\,\partial_r\alpha & R^\theta_{\varphi\theta\varphi} = \left(1 - e^{-2\beta}\right)sen^2\theta \end{array} \qquad \textbf{[3.1.9]}$$

Tomando la contracción de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)}[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\,\partial_r\beta + (2/r)\partial_r\alpha] \\ R_{rr} &= -\partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\,\partial_r\beta - (2/r)\partial_r\beta \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta}[r(\,\partial_r\beta - \partial_r\alpha) - 1] + 1 \\ R_{\varphi\varphi} &= sen^2\theta R_{\theta\theta} \end{aligned} \qquad \textbf{[3.1.10]}$$

Y para futuras referencias se calcula la curvatura escalar; es decir la constante de Ricci:

$$R = -e^{-2\beta}\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}(\partial_r\alpha - \partial_r\beta) + \frac{1}{r^2}(1-e^{2\beta})\right] \qquad \textbf{[3.1.11]}$$

El Tensor de Ricci calculado debe ser igual a cero, entonces como exige las ecuaciones de Einstein, se debe resolver un sistema de 4 ecuaciones diferenciales no-lineales acopladas para dos incógnitas. En principio este sistema está sobre determinado, pero como las componentes R_{tt} y R_{rr} deben también anularse de forma independiente:

$$0 = e^{-2(\alpha-\beta)}R_{tt} + R_{rr} = (2/r)(\partial_r\alpha+\partial_r\beta) \qquad \textbf{[3.1.12]}$$

Lo cual implica que $\alpha = -\beta + c$, con $c = 0$, se tiene que: $\alpha = -\beta$.

Sustituyendo esta condición en la ecuación para $R_{\theta\theta} = 0$, se lee ahora:

$$e^{2\alpha}(2r\partial_r\alpha + 1) = 1 \qquad \textbf{[3.1.13]}$$

Que es equivalente a:

$$\partial_r(re^{2\alpha}) = 1 \qquad \textbf{[3.1.14]}$$

Al integrar directamente esta ecuación se obtiene:

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_S}{r}; \qquad R_S = cte. \qquad \textbf{[3.1.15]}$$

Donde R_S es una constante no determinada. Con el hecho de que $\alpha = -\beta$ y esta última ecuación la métrica toma la forma:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \qquad \textbf{[3.1.16]}$$

La constante R_S se conoce como radio de Schwarzschild, y se encuentra que, en el límite del campo débil la componente tt de la métrica satisface para un punto de masa el hecho de que:

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \qquad \textbf{[3.1.17]}$$

Entonces, $R_S = 2GM$, y se obtiene la métrica de Schwarzschild.

En otras palabras, M es una medida para la masa del objeto que causa la curvatura del espacio. A veces se denomina a M como la masa geométrica de la solución de Schwarzschild.

La solución de Schwarzschild, por lo menos la parte con $r > R_0$, corresponde a la parte exterior del campo gravitatorio causado por un objeto esférico con masa M y radio $R_0 > 2M$ y por esto su nombre más correcto es la solución exterior de Schwarzschild.

Existe también otra solución que describe la parte interior $r < R_0$ donde se encuentra la estrella o el planeta, llamada la solución interior de Schwarzschild. El Tensor de Energía Momento de la solución interior es un fluido perfecto, mientras la solución exterior, es una solución de vacío. Para el caso de un planeta o una estrella con radio $R_0 > 2M$, las dos soluciones enlazan suavemente en $r = R_0$.

En particular, no existen soluciones de vacío con simetría esférica que no sean estáticas y si una solución de esta clase es estática, es de Schwarzschild.

En otras palabras, una bola de materia puede contraerse o una estrella puede explotar conservando su simetría esférica, la solución exterior siempre será la misma métrica estática

Si $M = 0$ o $r \to \infty$ (es decir, a grandes distancias la influencia de la presencia del objeto es despreciable), se tiene un espacio plano nuevamente. Soluciones que tienen esta propiedad se llaman asintóticamente planas y se las puede ver como objetos aislados.

NOTA: El *Teorema de Birkhoff* asegura que es la única solución esféricamente simétrica de las ecuaciones del vacío.

Singularidades: En la ecuación **[3.1.1]** referida a la métrica de Schwarzschild los coeficientes se vuelven infinitos en $r = 0$ y $r = 2GM$; pero los coeficientes son dependientes de las coordenadas. Así que, es posible tener una singularidad que resulte en una falla general del propio sistema de coordenadas específico más que en la variedad diferencial subyacente. Un ejemplo de esto es el propio origen en el plano de un sistema de coordenadas expresado en coordenadas polares, donde la métrica es $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ y el cual se degenera y la componente $g_{\theta\theta} = r^{-2}$ de la métrica inversa se dispara sin medida aun cuando el punto de la variedad es igual que cualquier otro.

La curvatura de una variedad diferencial se mide mediante el Tensor de Riemann, de modo que es difícil determinar cuando este tensor es infinito dado que sus componentes son dependientes del sistema de coordenadas elegido.

Sin embargo, de la curvatura es posible extraer varias cantidades escalares y como los escalares son independientes de las coordenadas será significativo decir que estos escalares se hacen infinitos.

El escalar más simple es el de Ricci: $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, pero también es posible construir escalares de orden superior como pueden ser: $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$, etc. Si alguna de estas cantidades escalares, no necesariamente todas, se va a infinito a medida se hace una aproximación a un punto determinado, entonces constituye una singularidad en la curvatura.

Así pues, aunque esta no sea una condición necesaria puede ser considerada suficiente para determinar una singularidad. Demostrar que un punto dado es no-singular puede resultar en un trabajo arduo y engorroso por lo que simplemente se seguirá como criterio el que las geodésicas sean "bien comportadas".

En el caso de la métrica de Schwarzschild un cálculo directo revela que:

$$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2M^2}{r^6} \qquad \textbf{[3.1.18]}$$

De modo que debe ser suficiente para convencerse de que $r = 0$ es un punto singular.

El otro punto en cuestión es el punto para el cual $r = 2GM$, el radio de Schwarzschild.

Es posible verificar que ninguna invariante de curvatura se indetermina en ese punto, lo cual permite suponer que no se trata de un punto singular sino de una mala elección del sistema de coordenado.

Al realizar el cambio de coordenadas apropiado se puede verificar que esta superficie es bien comportada (al mismo tiempo que interesante) y en la métrica de Schwarzschild determina el *horizonte de eventos* de un hoyo negro.

Ejemplo: Para el caso del Sol, $R_\odot = 10^6 GM_\odot$. De modo que $r = 2GM_\odot$ está muy adentro en el interior del Sol, donde no se espera que opere la métrica de Schwarzschild.

Así que, se requerirá una métrica estelar realista que aproxime por un lado suavemente al origen y que coincida con la métrica exterior de Schwarzschild.

Sin embargo, hay objetos para los cuales la métrica de Schwarzschild aplica completamente en su descripción, este es el caso de los hoyos negros.

Ejemplo: Demostrar que la métrica de Schwarzschild se reduce como un caso especial a la métrica Lorentziana correspondiente a un espacio-tiempo plano.

A grandes distancias del cuerpo que está generando un campo esféricamente simétrico y estático, podemos poner r → ∞ con lo cual tenemos en la métrica de Schwarzschild dos términos que se desvanecen:

$$ds^2 = (1 + 2GM/rc^2)c^2dt^2 - (1 + 2GM/rc^2) - 1dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2)$$

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2sen^2\theta d\varphi^2$$

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sen^2\theta d\varphi^2)$$

Para la conversión de coordenadas esféricas a coordenadas Cartesianas rectangulares tenemos lo siguiente:

$$x = r\,sen\,\theta\,cos\,\varphi;\;\; y = r\,sen\,\theta\,sen\,\varphi;\; z = r\,cos\,\theta$$

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2sen^2\theta(d\varphi)^2$$

Con esto tenemos entonces lo siguiente:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Esta es precisamente la métrica de Lorentz para un espacio-tiempo plano, propia de la Teoría Especial de la Relatividad.

■

3.2 El Perihelio de Mercurio

Las fluctuaciones de la órbita de mercurio eran ampliamente conocidas y aunque se habían calculado con bastante error se aceptaba que lo que las causaba era un planeta de nombre Vulcano, en una órbita similar, pero del otro lado del Sol; y aunque inexistente bien a podido ser fuente de inspiración de varias obras de Ciencia Ficción

Al falso descubridor, Leverrier, Napoleón III le condecoró en 1859 por su supuesta gran aportación al conocimiento del Sistema Solar.

En 1916 Einstein logra una formulación de la Relatividad General que permite calcular el corrimiento del perihelio de Mercurio con asombrosa precisión; lo cual lo lleno de una enorme satisfacción ya que corrobora que su teoría es adecuada para predecir fenómenos naturales.

Einstein propuso tres comprobaciones de su Relatividad General: el avance del perihelio de Mercurio, la deflexión de la luz al pasar cerca de un objeto masivo y la dilatación gravitacional del tiempo, conocidos hoy como *los tres tests clásicos*. Estos tests son más fáciles en la presencia de un objeto masivo estático con simetría esférica. La métrica que describe un espacio tiempo con tal objeto es la métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \qquad \textbf{[3.2.1]}$$

Avance del Perihelio: La relatividad general predice una corrección relativista a la primera ley de Kepler en las órbitas de los planetas: así que, en lugar de que el planeta siga órbitas perfectamente elípticas (en ausencia de otros planetas), la elipse de la trayectoria gira lentamente en el plano de la órbita, de modo que el perihelio; es decir, la posición más cercana al Sol, se mueve cierto ángulo ε a lo largo de un círculo con respecto a su perihelio anterior.

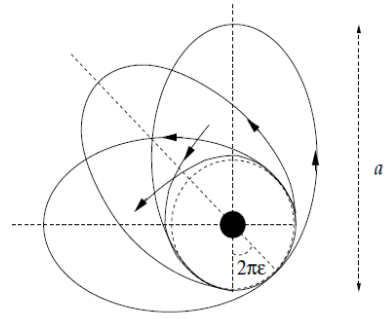


Figura 3.2.1: Avance del perihelio. Cada vuelta alrededor del Sol, el perihelio se mueve un ángulo $2\pi\varepsilon$.

Para calcular las órbitas de los planetas en relatividad general se tienen que calcular las geodésicas temporales en la solución de Schwarzschild.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2) \qquad \textbf{[3.2.2]}$$

Donde la constante $M = G_N m$, se conoce como *masa geométrica de la solución de Schwarzschild*, tiene dimensiones de longitud y es una medida para la masa m del objeto. Para el Sol, M corresponde aproximadamente a $1.5\ km$.

Teniendo como ecuación general de la geodésica en coordenadas curvilíneas $\mathbb{R}^N$, con parametrización lineal $s = s(\tau)$:

$$\ddot{x}^\sigma + \Gamma^\sigma_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = 0 \qquad \textbf{[3.2.3]}$$

Que corresponde también a la solución de la ecuación en coordenadas cartesianas $\ddot{x}^i = 0$.

Dado que en la métrica lorentziana existen tres tipos de geodésicas: temporales, espaciales o nulas (lumínicas). En el caso en el que la geodésica es temporal, el parámetro τ tiene la interpretación del tiempo propio de la partícula que viaja a lo largo de la geodésica. Si la geodésica es espacial o nula, no tiene significado físico especial.

Para distinguir los tres casos hay que añadir a la ecuación **[3.2.3]** una ecuación más que especifica el tipo de geodésica a través del vector tangente de la curva:

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \epsilon, \qquad \epsilon = \begin{cases} 1 & si\ x^\mu(\tau)\ es\ temporal \\ 0 & si\ x^\mu(\tau)\ es\ nulo \\ -1 & si\ x^\mu(\tau)\ es\ espacial \end{cases} \qquad \textbf{[3.2.4]}$$

Así que, debido al movimiento plano, podemos tomar sin pérdida de generalidad $\theta = \pi/2$, en la solución espacial de modo que:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\dot{\phi}^2 = 1 \qquad \textbf{[3.2.5]}$$

Entonces si se considera el Lagrangiano relativista como:

$$2\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = -1 \qquad \textbf{[3.2.6]}$$

se tiene que,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} = k, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = r^2\dot{\phi} = l \qquad \textbf{[3.2.7]}$$

Donde k y l son constantes de integración. De la segunda ecuación se puede hacer la interpretación de l como el momento angular del planeta por unidad de masa.

Sustituyendo de las ecuaciones [3.2.7] $\dot{t}$ y $\dot{\phi}$ en [3.2.6] se obtiene:

$$-1 = \frac{\dot{r}^2 - k^2}{1 - 2M/r} + \frac{l^2}{r^2} \qquad [3.2.8]$$

Que se puede interpretar como:

$$\dot{r}^2 + V(r) = k^2 \qquad [3.2.9]$$

Donde $V(r)$ es el potencial efectivo y tiene la forma:

$$V(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 - \frac{l^2}{r^2}\right) \qquad [3.2.10]$$

Ya que lo que interesa es encontrar la órbita $r(\phi)$, se utiliza $dr/d\phi = \dot{r}/\dot{\phi}$ para transformar la ecuación [3.2.9] en:

$$\dot{r}^2 + V(r) = \dot{\phi}^2\dot{r}^2 + V(r) = \frac{l^2}{r^4}\dot{r}^2 + V(r) = k^2 \qquad [3.2.11]$$

Cambiando la variable $u = 1/r$ y con $\dot{u} = -\dot{r}/r^2 = -u^2\dot{r}$, después de dividir por l^2 y rearreglar términos la ecuación se reduce a:

$$\dot{u}^2 + u^2 = K + \frac{2M}{l^2}u + 2Mu^3 \qquad [3.2.12]$$

Donde, $K = (k^2 - 1)/l^2$ y es una medida para la energía del planeta.

La ecuación [3.2.12] corresponde a una ecuación de potencial central de la mecánica newtoniana. Se puede comprobar que la trayectoria elíptica:

$$u = \frac{2M}{l^2}(1 + e\cos\phi) \qquad [3.2.13]$$

De un planeta con masa m, momento angular $L = ml$, energía $E = ml^2K/2$ y excentricidad $e = \sqrt{1 + Kl^4/M^2}$, es una solución de [3.2.12] sin el último término.

De modo que se puede interpretar dicho término como una perturbación a la ecuación de Newton ya que es pequeño en comparación con las típicas órbitas planetarias.

En lugar de intentar resolver la ecuación [3.2.12], resulta más fácil derivarla con respecto a ϕ y obtener la llamada ecuación relativista de Binet:

$$2\dot{u}\ddot{u} + 2u\dot{u} = \frac{2M}{l^2}\dot{u} + 6Mu^2\dot{u} \qquad [3.2.14]$$

La solución para la que $\dot{u} = 0$ es trivial e implica una órbita circular. Si en cambio $\dot{u} \neq 0$, la ecuación se puede simplificar de modo que:

$$\ddot{u} + u = \frac{M}{l^2} + 3Mu^2 \qquad \textbf{[3.2.15]}$$

Donde otra vez el último término es una perturbación en la ecuación de Binet de la mecánica newtoniana.

Tomando $\varepsilon = 3M^3/l^2$ como parámetro de perturbación sin dimensiones y suponiendo que la solución es en primera aproximación de la forma $u = u_0 + \varepsilon u_1$, con u_0 la solución newtoniana de **[3.2.13]**, se encuentra que la ecuación para la perturbación en primer orden viene dada por:

$$\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 = \frac{M}{L^2}\left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + 2e\cos\phi + \frac{1}{2}e^2\cos 2\phi\right] \qquad \textbf{[3.2.16]}$$

Sustituyendo $u_1 = A + B\phi\cos\phi + C\cos 2\phi$ en la ecuación anterior, se encuentra que existe una solución para:

$$A = \frac{M}{l^2}\left(1 + \frac{e^2}{2}\right), \qquad B = \frac{Me}{l^2}, \qquad C = -\frac{Me^2}{6l^2} \qquad \textbf{[3.1.17]}$$

De modo que la solución hasta primer orden viene dada por:

$$u \approx \frac{M}{l^2}\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + \varepsilon\frac{Me}{l^2}\left[1 + e\phi\,sen\,\phi + e^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}cos\,2\phi\right)\right] \qquad \textbf{[3.2.18]}$$

De los términos de corrección, el segundo es el más importante porque es proporcional a ϕ y representa por lo tanto un efecto acumulativo. Despreciando los otros términos y conservando los términos hasta orden ε, se puede escribir la ecuación anterior como:

$$u \approx \frac{Me}{l^2}\left[1 + e\,cos\big((1-\varepsilon)\phi\big)\right] \qquad \textbf{[3.2.19]}$$

Esta es la ecuación aproximada de una elipse, solo que el periodo es:

$$T = \frac{2\pi}{(1-\varepsilon)} \approx 2\pi(1+\varepsilon) \qquad \textbf{[3.2.20]}$$

En otras palabras, el planeta no sigue una trayectoria perfectamente elíptica, sino que la elipse se va girando un poco cada revolución, de modo que el planeta alcanza su perihelio un poquito más tarde cada vez. El retraso viene dado precisamente por el parámetro ε. El efecto es independiente de la masa del planeta, pero aumenta cuanto más cerca esté el planeta del Sol y más excéntrica sea su órbita.

El desplazamiento del perihelio de Mercurio es de 574 arcosegundos (1/60 del minuto de arco) por siglo, y ya era conocido desde la primera mitad del siglo XIX. En los 1850, Le Verrier, el codescubridor de Neptuno calculó que la mayor parte del efecto medido (531 arcosegundos por siglo) es debido a la influencia gravitacional de los demás planetas, sobre todo de Venus.

Pero el cálculo de Le Verrier también mostró que aún quedaba un desplazamiento adicional de unos 42 arcosegundos por siglo sin explicar, mucho más que el error observacional, lo que hizo que el problema era considerado como una de las anomalías más grandes de la mecánica newtoniana. Le Verrier mismo creyó que este efecto era debido a la existencia de un planeta interior a Mercurio, bautizado *Vulcano*. El problema de esta teoría era que, para poder causar el efecto calculado, *Vulcano* debería ser tan grande que sería perfectamente visible desde la Tierra.

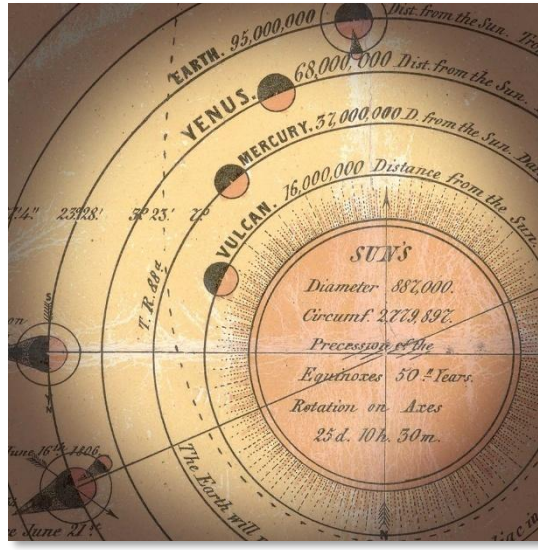


Figura 3.2.2: Vulcano en un diagrama del Sistema Solar fabricado para escuelas en 1846, poco antes del descubrimiento de Neptuno por la misma persona que teorizó, Urbain Le Verrier.

A pesar de que se anunciaron algunas observaciones (después de la publicación de Le Verrier), su existencia nunca se ha llegado a confirmar y el problema permaneció hasta que Einstein calculó en 1915 las correcciones relativistas al potencial newtoniano y vio que causaban un desplazamiento al perihelio de Mercurio adicional al efecto newtoniano, que cuadraba con las observaciones. Efectivamente el efecto relativista es de 42.98 ± 0.04 arco segundos por siglo, con un error teórico perfectamente compatible con las observaciones.

3.3 La Deflexión de la Luz

"La observación del eclipse solar de 1919 en Brasil y en África suministró la primera prueba experimental de la validez de la teoría de la relatividad de Albert Einstein".

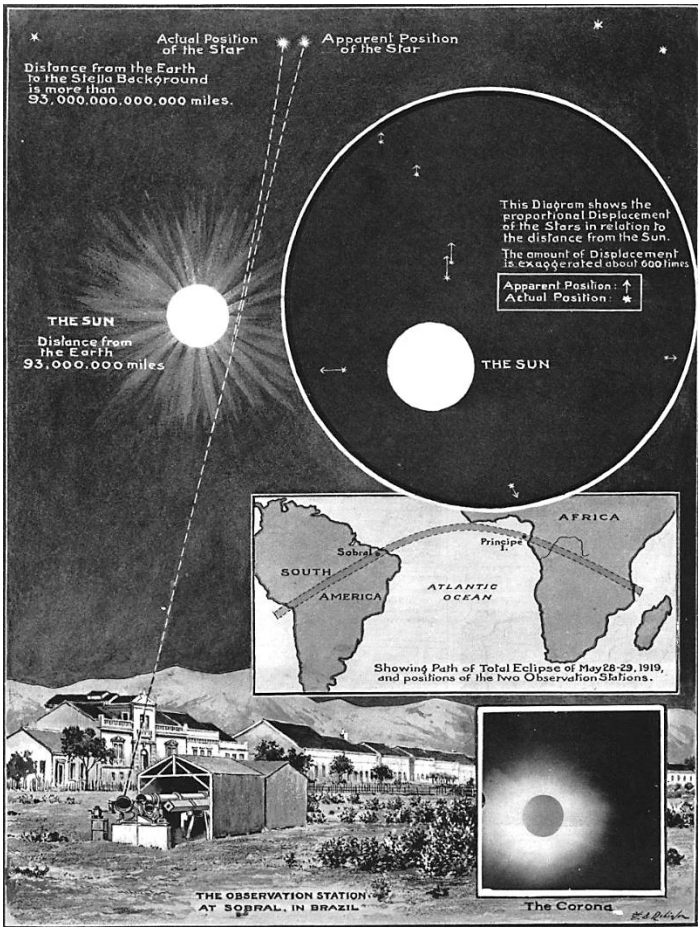


Figura 3.3.1: Los resultados de la expedición de Eddington de 1919 demostraron, de forma concluyente, que la Teoría General de la Relatividad describía la curvatura de la luz estelar alrededor de objetos masivos, desmintiendo la teoría newtoniana. Crédito de la imagen: Illustrated London News, 1919.

Por increíble que parezca esta predicción y descubrimiento ha permitido el que en la actualidad se puedan realizar intercambios de señales con las adecuadas correcciones, no solo en las inmediaciones de la Tierra como parte de nuestras telecomunicaciones diarias, sino también a lo largo del sistema solar.

Sin contar con las correcciones de corrimiento al rojo y de desviación gravitacional sería imposible tener una buena precisión en la decodificación de señales.

Y por si fuera poco, la deflexión gravitacional permite observar objetos astronómicos distantes cuya luz se curva al pasar por las proximidades de alguna galaxia que hace las veces de enorme lente y descompone la luz en múltiples imágenes que pueden ser captadas e integradas para obtener la información de los confines del Universo.

El cálculo de la deflexión de la luz es muy parecido al cálculo del perihelio de Mercurio, sólo que, en vez de calcular las geodésicas temporales en la solución de Schwarzschild, hay que calcular las geodésicas nulas. Por lo tanto, restringiendo el cálculo al movimiento en el plano, las componentes t y θ de la ecuación de la geodésica y la condición de que ésta sea nula imponen condiciones análogas a **[3.2.6]** y **[3.2.7]**.

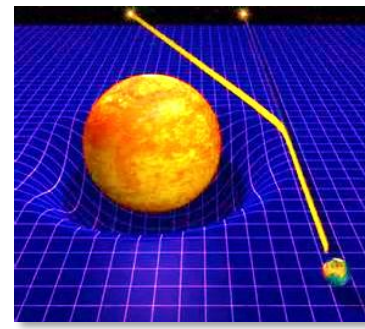


Figura 3.3.2: Deflexión de la luz.

Para un rayo de luz, se tiene entonces que el *Lagrangiano Relativista* (ver ANEXO) se puede escribir como: $2\mathcal{L} = 0$ (que indica que el objeto no tiene masa) de modo que se obtiene:

$$\frac{\dot{r}^2 - k^2}{1 - 2M/r} + \frac{l^2}{r^2} = 0 \qquad \textbf{[3.3.1]}$$

O bien,

$$\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = k^2 \qquad \textbf{[3.3.2]}$$

Cambiando nuevamente la variable independiente a ϕ y sustituyendo $u = 1/r$ se obtiene la ecuación de movimiento para los rayos de luz en el espacio tiempo de Schwarzschild:

$$\dot{u}^2 + u^2 = \frac{k^2}{l^2} + 2Mu^3 \qquad \textbf{[3.3.3]}$$

Que puede compararse con la ecuación de movimiento para partículas materiales **[3.2.12]** diferenciando se obtiene:

$$\ddot{u} + u = 3Mu^2 \qquad \textbf{[3.3.4]}$$

Comparado con u en la parte izquierda de la ecuación, el término $3Mu^2$ es muy pequeño. En el sistema solar:

$$\frac{3Mu^2}{u} = 3Mu = \frac{3R_s}{2r} \leq \frac{3R_s}{R_\odot} \approx 10^{-6} \qquad \textbf{[3.3.5]}$$

Entonces, un rayo de luz casi queda expresado por la solución homogénea de la ecuación del oscilador armónico $\ddot{u} + u = 0$, que es $u_0 = A\, sen\, \phi + B \cos \phi$.

Se requiere que la posición más cercana en $u_0 = 1/b$, donde b es el parámetro de impacto se alcance en $\phi = \pi/2$, lo cual implica que $B = 0$ y $A = 1/b$; o bien:

$$u_0 = \frac{sen\, \phi}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad r_0 = \frac{b}{sen\, \phi} \qquad \textbf{[3.3.6]}$$

Nótese que esta es una línea recta en coordenadas polares, como debe ser.

Insertando la solución de más bajo orden como una perturbación en el lado derecho de la ecuación **[3.3.4]** se tiene:

$$\ddot{u} + u = \frac{3M}{b^2} sen^2 \phi = \frac{3M}{b^2}(1 - cos^2 \phi) \qquad \textbf{[3.3.7]}$$

De la que se pueden encontrar las soluciones particulares para obtener:

$$u = \frac{sen\, \phi}{b} + \frac{3M}{b^2} - \frac{3M}{2b^2}\left(1 - \frac{1^2}{3} \cos 2\phi\right) \qquad \textbf{[3.3.8]}$$

Dada la orientación del sistema de coordenadas; por ejemplo, con la mayor aproximación en $\phi = \pi/2$, se tiene que $\phi \approx 0$ para un rayo que viene de la izquierda a una gran distancia. Entonces $sen\, \phi \approx 0$ y $\cos 2\phi \approx 1$. Entonces se tiene:

$$u \approx \frac{\phi}{b} + \frac{2M}{b^2} \qquad \textbf{[3.3.9]}$$

En el límite asintótico cuando $r \to \infty$, o $u \to 0$ esto da el ángulo:

$$|\phi| \approx \frac{2M}{b} \qquad \textbf{[3.3.10]}$$

El ángulo de deflexión total es el doble del resultado anterior:

$$\alpha = 2|\phi| \approx \frac{4M}{b} = 2\frac{R_s}{b} \approx 1.74'' \qquad \textbf{[3.3.11]}$$

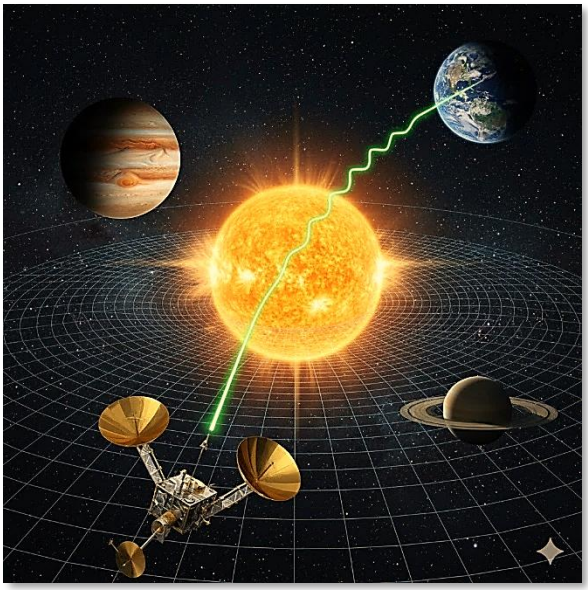


Figura 3.3.3: Los Campos gravitacionales modifican las trayectorias de las señales electromagnéticas.

3.4 Hoyos Negros de Schwarzschild

Es muy importante comprender que los agujeros u hoyos negros, ni son agujeros del espacio-tiempo de ninguna manera ni realmente son del todo negros. Los hoyos negros, no son túneles en el espacio-tiempo, solo son lugares dónde materia, tiempo y energía se encuentran con enormes valores en una región pequeña, conformando así un estado singular muy parecido al que dio origen a nuestro Universo.

En el caso de una estrella que al finalizar su vida colapsa hasta constituirse como hoyo negro, podemos considerar que la estrella continúa ejerciendo su interacción gravitacional tal como si estuviera ahí, solo que ahora se encuentra toda concentrada dentro del radio de Schwarzschild.

Sobre todos los ejemplos que consideran entrar y salir de hoyos negros resultan inútiles porque nunca toman en cuenta el apachurramiento del cual la termodinámica se encarga de decirnos que es irreversible.

En las fronteras de los hoyos negros estelares se crean esporádicamente partículas y antipartículas de alta energía de modo que, aunque poco, si radían. En cambio, los hoyos negros supermasivos, como los núcleos activos de galaxias que literalmente emiten jets de partículas en grandes cantidades.

Solo resta ver si es posible que existan los mini hoyos negros. En mi opinión son imposibles ya que como lo dice la relatividad se requiere muchísima masa en gran colapso gravitacional para vencer las fuerzas inter nucleares y lograr el cambio de estado para crear uno.

La singularidad en $r = 2m$: Considérese un observador que cae libremente hacia el centro del espacio tiempo de Schwarzschild a lo largo de una órbita radial. Ya que $\dot{\phi} = 0$, el momento angular es nulo, $L = 0$, y la ecuación

$$\dot{r}^2 + V(r) = k^2 \qquad \textbf{[3.4.1]}$$

Se puede escribir como:

$$\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = E^2 \qquad \textbf{[3.4.2]}$$

Supóngase al observador en reposo en $r = R$, entonces $E^2 = 1 - 2m/R$ y $E^2 < 1$, de modo que se tiene:

$$\dot{r}^2 = \left(1 - \frac{2m}{R}\right) - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = 2m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \qquad \textbf{[3.4.3]}$$

Que da,

$$\frac{dr}{\sqrt{2m\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)}} = d\tau \qquad \textbf{[3.4.4]}$$

Donde τ es el tiempo propio.

Esta ecuación admite una solución paramétrica. Empezando por:

$$r = \frac{R}{2}(1+cos\,\eta),\;\; dr = -\frac{R}{2}(sen\,\eta\, d\eta) \qquad \textbf{[3.4.5]}$$

Entonces, como

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{R} = \frac{2}{R(1+cos\,\eta)}-\frac{1}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{1-cos\,\eta}{1+cos\,\eta}\right) = \frac{1}{R}\frac{(1-cos\,\eta)^2}{sen^2\eta} \qquad \textbf{[3.4.6]}$$

Con este resultado se puede escribir la ecuación **[3.4.4]** como:

$$\frac{\sqrt{R}sen\,\eta\, dr}{\sqrt{2m}(1-cos\,\eta)} = -\frac{R\sqrt{R}sen^2\eta\, d\eta}{2\sqrt{2m}(1-cos\,\eta)} = -\sqrt{\frac{R^3}{8m}}(1+cos\,\eta)d\eta \qquad \textbf{[3.4.7]}$$

Integrando se encuentra que es solución de la ecuación **[3.4.4]** si:

$$\tau = -\sqrt{\frac{R^3}{8m}}(\eta+sen\,\eta), \qquad d\tau = \sqrt{\frac{R^3}{8m}}(\eta+cos\,\eta). \qquad \textbf{[3.4.8]}$$

Para $\eta = 0$, el tiempo propio es $\tau = 0$ y $r = R$. El tiempo propio empieza a correr cuando la caída comienza. El centro en $r = 0$ es alcanzado cuando $\eta = \pi$; es decir, después del tiempo propio:

$$\tau_0 = \pi\sqrt{\frac{R^3}{8m}} \qquad \textbf{[3.4.9]}$$

Lo cual indica que el observador cae libremente dentro de un tiempo finito "a través" de la singularidad en $r = 2m$ sin encontrar ningún problema cinemático.

Ahora bien, si la partícula que cae a $r = 0$ dejando el reposo en infinito, la trayectoria que seguirá será la de una geodésica obtenida con el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y se podrá escribir:

$$E_{total} = 0 = m\dot{r}^2 - \frac{2GMm}{r} \qquad \textbf{[3.4.10]}$$

De modo que el tiempo propio para llegar desde r_1 a $r = 0$ es:

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = -\int_{r_1}^{0} \sqrt{\frac{r}{2GM}}\, dr = \left(\frac{2}{9GM}\right)^{1/2} r_1^{3/2} \qquad \textbf{[3.4.11]}$$

Que corresponde a un tiempo finito como era de esperarse.

Sin embargo, un observador a infinito ve el tiempo de caída infinito, si pues:

$$dt^2 = \alpha^{-1} d\tau^2 + (\alpha c)^{-2} dr^2 \qquad \textbf{[3.4.12]}$$

De modo que:

$$dt = \frac{1}{c}\left(\frac{r}{r_s}\right)\frac{dr}{1 - r_s/r} \qquad \textbf{[3.4.13]}$$

Que se obtiene al sustituir **[3.4.13]** en **[3.4.10]**; así que:

$$t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt = -\frac{1}{c r_s^{1/2}} \int_{r_1}^{0} \frac{r^{3/2}}{r - r_s}\, dr \qquad \textbf{[3.4.14]}$$

De modo que si $r \to r_s \Longrightarrow t_2 - t_1 \to \infty$.

Corrimiento al rojo: ya que el tiempo propio de caída es:

$$\frac{ds}{c} = d\tau = \sqrt{1 - r_s/r}\, dt \qquad \textbf{[3.4.15]}$$

En términos de frecuencias se tiene que:

$$\nu_{observada} = (1 - r_s/r)^{1/2}\, \nu_{emitida} \qquad \textbf{[3.4.16]}$$

Energía de Escape: Para un cuerpo sometido a un potencial gravitacional, tal que en infinito ($r = \infty$) se encuentre en reposo, se tiene que:

$$E_{Total} = E_{cinética} - E_{potencial} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r} \qquad \textbf{[3.4.17]}$$

Donde r es el radio del objeto gravitacional de masa M y $G = 6.672 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$ es la constante gravitacional. Si $E_{Total} = 0$ y $v = c$ entonces,

$$\frac{2GM}{c^2} = r \triangleq r_s \qquad \textbf{[3.4.18]}$$

Donde r_s es llamado *radio de Schwarzschild* y establece la proporción entre la masa y el radio del objeto gravitacional, lo cual equivale a una medida de su densidad. Si un objeto es tal que su radio $r < r_s$ entonces es un objeto oscuro; es decir, un objeto tan masivo en proporción a su radio, o tan denso que la luz no puede escapar de él.

Si toda la masa de un cuerpo es comprimida hasta quedar contenida en un radio menor que su radio r_s, la atracción gravitacional será tan intensa que toda la masa continuará comprimiéndose aún más.

Con instrumentos astronómicos cada vez más potentes, la existencia de los agujeros negros no sólo ha sido confirmada de varias maneras, sino que existe la certeza de que inclusive la galaxia en la que vivimos, la Vía Láctea, tiene en su núcleo central un agujero negro gigantesco, al igual que muchas otras galaxias.

NOTA: Para el caso de la Tierra la velocidad de escape es $v_e = \sqrt{2GM/r_T} \approx \sqrt{2gr_T}$, tomando $g \approx 10\ m/s^2$ y $r_T \approx 6300\ km$.

Así entonces $v_e \approx 11.2\ km/s \approx 40{,}410\ km/h$; es decir que, ¡equivale a la velocidad para dar una vuelta a la Tierra en una sola hora!

Curvatura de un objeto masivo: De la métrica de Schwarzschild, se tiene que:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2) \qquad \textbf{[3.4.19]}$$

Para $ds^2 = d\Omega^2 = d\theta^2 + sen^2\theta\, d\varphi^2 = 0$ se tiene que una trayectoria geodésica nula, de modo que se cumple que:

$$cdt = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr \qquad \textbf{[3.4.20]}$$

Así que la distancia recorrida por un fotón en la trayectoria geodésica nula de r al centro de la distribución de masa es:

$$t' = \int_0^r \frac{dr}{c\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} \qquad \textbf{[3.4.21]}$$

Cuando un fotón cae a r_s la ecuación diverge; de modo que no se puede ver la entrada de fotones ni tampoco la salida dentro del radio de Schwarzschild r_s.

Así, la métrica de Schwarzschild predice naturalmente la existencia de los hoyos negros.

Figura 3.3.1: Hoyo Negro.

Se puede demostrar que el factor de curvatura local está dado por:

$$k = \sqrt{2GM/r^3c^2} \qquad \textbf{[3.4.22]}$$

Pero k es el inverso del radio de curvatura R_c; de modo que se tiene como *parámetro gravitacional*:

$$\frac{r^2}{R_c^2} \equiv \frac{2GM}{rc^2} \qquad \textbf{[3.4.23]}$$

¡Así que si el radio de curvatura decrece la curvatura del espacio aumenta!

NOTA: las singularidades en $r = r_s$ es removible y depende del sistema de coordenadas mientras que la singularidad en $r = 0$ es topológica.

3.5 Órbitas de fotones

Es increíble como los agujeros negros encajan en la dinámica estelar. Como en los sistemas binarios, en los que una estrella colapsa en hoyo negro y el sistema sigue rotando como un par de estrellas ligadas.

También propician una gran actividad en los núcleos de algunas galaxias, donde se concentra una cantidad portentosa de estrellas y de los que aun sabemos muy poco.

Para el caso de los agujeros negros estelares tenemos algunos comportamientos básicos de las órbitas de fotones; desde los que simplemente caen a través del horizonte de eventos, los que se mantienen en órbitas estables y hasta los que salen expulsados del campo gravitacional de la estrella convertida en Hoyo Negro.

Hasta ahora, hemos visto algunas consecuencias de las Ecuaciones de Campo de Einstein, que nos permiten estudiar las estrellas, las galaxias y hasta el Universo y su evolución.

Sin embargo, está lejos aún el verdadero entendimiento de este Universo en el que vivimos; y aunque no podamos saberlo todo si es un gran reto para el futuro explicar que es la materia cuántica, el cómo se da la curvatura del espacio-tiempo, que es la materia oscura, que es la energía oscura ...

Los rayos de luz se mueven en geodésicas nulas y satisfacen las mismas ecuaciones diferenciales que las partículas normales excepto que debemos utilizar parámetros afines en vez de la longitud de arco y fijar $ds^2 = 0$.

Haciendo esto, se obtienen, análogamente a los casos estudiados anteriormente, las siguientes tres ecuaciones:

$$\alpha \dot{t} = \bar{k}, \qquad r^2\dot{\phi} = \bar{h} \qquad \textbf{[3.5.1]}$$

$$\dot{r}^2 = \bar{k}^2 - \frac{\bar{h}^2}{r^2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \equiv \bar{k}^2 - V_p(r)$$

Donde $V_p(r)$ denota un potencial de fotón efectivo. Ya que la escala del parámetro afín es arbitraria se puede definir $\bar{h} = 1$ así se excluyen las órbitas radiales triviales ($\bar{h} = 0$).

Diferenciando $V_p(r)$ se encuentra que:

$$V_{max} \equiv \frac{1}{27m^2} \qquad \textbf{[3.5.2]}$$

En $r = 3m$. La trayectoria circular de la luz correspondiente a $r = 3m$ es evidentemente inestable, una pequeña desviación ocasionará una espiral hacia afuera o hacia adentro del campo gravitacional generado por el objeto masivo. Se pueden clasificar las órbitas fotónicas por el ángulo ϑ ("*varteta o variante de teta*") inicial de la trayectoria respecto a la dirección radial.

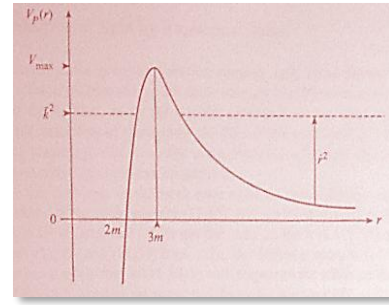


Figura 3.5.1: Potencial fotónico.

Directamente de la parte espacial de la métrica como una aplicación infinitesimal de la órbita se encuentra que:

$$sen^2\,\vartheta = \frac{r^2 d\phi^2}{\alpha^{-1}dr^2 + r^2 d\phi^2} = \alpha\left(\alpha + \frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{d\phi^2}\right) \qquad \textbf{[3.5.3]}$$

Y, por otro lado, de la segunda ecuación **[3.5.1]**,

$$\dot{r}^2 = \frac{dr^2}{d\phi^2}\dot{\phi}^2 = \frac{dr}{d\phi}\frac{1}{r^4} \qquad \textbf{[3.5.4]}$$

Que en conjunción con la tercera ecuación también de **[3.5.1]** permite escribir:

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{d\phi^2} = r^2\,\dot{r}^2 = \bar{k}^2 - \alpha \qquad \textbf{[3.5.5]}$$

Entonces, por **[3.5.3]**, se obtiene:

$$sen^2\,\vartheta = \frac{\alpha}{r^2}\frac{1}{\bar{k}^2} \qquad \textbf{[3.5.6]}$$

Y esta fórmula aplica igualmente para un ángulo interior o exterior (ya que $sen\,(\pi - \vartheta) = sen\,\vartheta$).

Si un fotón es emitido con un valor de $r > 3m$ en una dirección hacia afuera ($\dot{r} > 0$) este se irá a infinito, pero si es emitido hacia adentro dependerá del ángulo inicial ϑ su trayectoria. Para ϑ pequeño caerá en el horizonte ($r = 2m$), pero para ϑ grande será dispersado

Si el fotón es emitido con un valor de $r < 3m$, en una dirección hacia adentro irá hacia el horizonte, pero si es emitido hacia afuera con ϑ pequeño se irá a infinito; con ϑ grande, alcanzará el radio circular, pero será reflejado en espiral al horizonte.

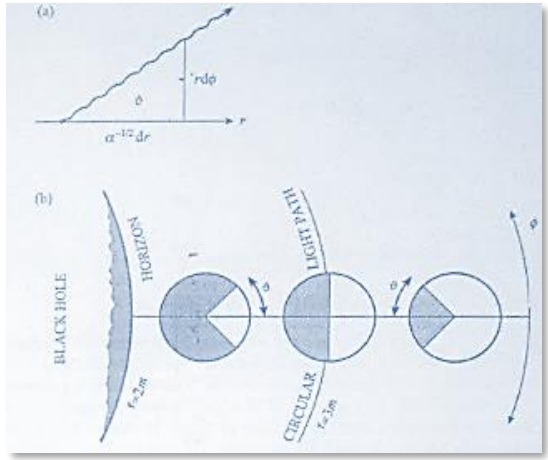


Figura 3.5.2: Trayectorias de fotones.

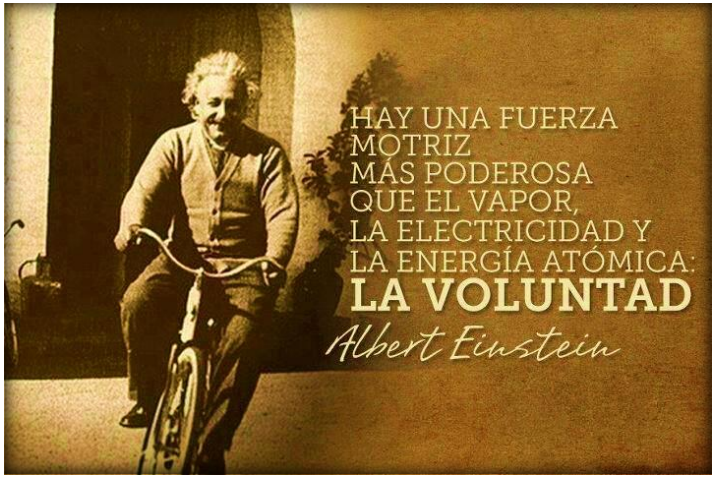
En ambos casos el valor crítico para ϑ correspondiente a $\bar{k}^2 = V_{max} = 1/27m^2$ será:

$$sen\ \vartheta = \frac{\alpha^{1/2}}{r} 3\sqrt{3}m \qquad [3.5.7]$$

De cualquier manera, el estudio de los fotones en torno a estas singularidades continúa dando resultados y se encuentra que las órbitas pueden ser extremadamente variadas.

Como hemos visto la luz, o los fotones, pueden orbitar alrededor de agujeros negros de Schwarzschild, aunque dichas órbitas sean inestables.

Figura 3.5.3: Fotones en órbitas complejas.


HAY UNA FUERZA
MOTRIZ
MÁS PODEROSA
QUE EL VAPOR,
LA ELECTRICIDAD Y
LA ENERGÍA ATÓMICA:
LA VOLUNTAD
Albert Einstein

ANEXOS

A1 LA LAGRANGIANA RELATIVISTA

1. El Problema Clásico vs. El Relativista

En mecánica clásica (Newton), la Lagrangiana es la diferencia entre energía cinética (T) y potencial (V):

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - V(x)$$

Pero esto **no funciona** en relatividad porque el tiempo y el espacio no son absolutos. Necesitamos una expresión que sea **invariante de Lorentz** (que funcione igual para cualquier observador).

2. Relatividad Especial: La Partícula Libre

En lugar de "minimizar la energía", en relatividad una partícula libre intenta maximizar su **tiempo propio** (τ) mientras viaja entre dos puntos. La "Acción" (S) es proporcional a la longitud de la trayectoria en el espacio-tiempo.

La Lagrangiana para una partícula libre de masa m es:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -\frac{mc^2}{\gamma}$$

Al desarrollar esta ecuación en serie de Taylor para velocidades bajas ($v \ll c$), recuperas la física de Newton:

$$L \approx -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

(El término $-mc^2$ es la energía en reposo, una constante que no afecta las ecuaciones de movimiento, y el segundo término es la energía cinética clásica).

3. Relatividad General: La Geometría (Tus imágenes)

Aquí es donde entra el material que subiste. En Relatividad General, la gravedad no es una fuerza externa (no hay "V" en la fórmula clásica), sino que está incorporada en la métrica $g_{\mu\nu}$ (la curvatura del espacio).

La Lagrangiana para una partícula moviéndose en un espacio curvo se escribe generalmente usando el tensor métrico:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

Donde:

- $g_{\mu\nu}$ contiene la información de la gravedad (como la del Sol en tu imagen).
- $\frac{dx}{d\lambda}$ es la velocidad a través del espacio-tiempo (cuadrivector velocidad).

Al aplicar las **Ecuaciones de Euler-Lagrange** a esta Lagrangiana:

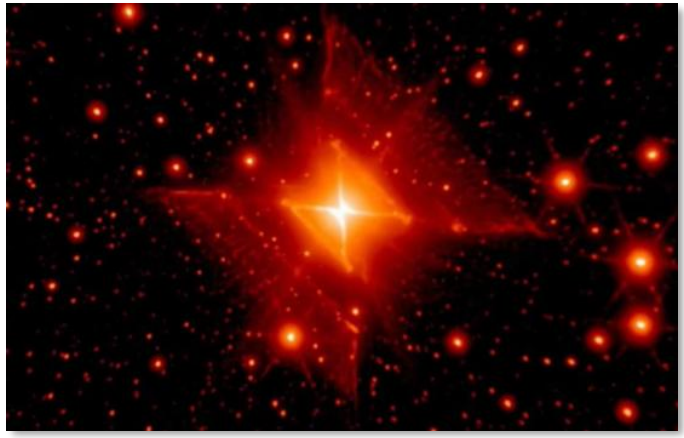
$$(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x})$$

Se obtiene automáticamente la **Ecuación de las Geodésicas**:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

Esta ecuación le dice a la partícula (o al planeta) cómo moverse.

- **Para materia:** La partícula sigue la curva que maximiza su tiempo propio.
- **Para luz:** Como la luz no tiene masa ($m = 0$) y no experimenta tiempo ($d\tau = 0$), la Lagrangiana se anula ($\mathcal{L} = 0$), lo que define las "geodésicas nulas".



Nebulosa del Rectángulo Rojo Nebulosa protoplanetaria (imagen real). ubicada a unos 2.300 años luz en la constelación Monoceros. Su forma rectangular simétrica intriga a los astrónomos. Tiene un diámetro estimado de 0,3 años luz y rodea a una estrella binaria envejecida llamada HD 44179.

A2 PROBLEMAS ILUSTRATIVOS RESUELTOS

1. Relatividad Especial

P-1 **A)** Calcule la aceleración centrípeta que experimenta un punto sobre la superficie de la Tierra en el ecuador considerando su movimiento de rotación y traslación alrededor del Sol.

Compare esta aceleración con la que experimenta nuestro sistema solar debido a la rotación de la Vía Láctea.

B) Estime la masa de nuestra Galaxia.

Solución:

A) La aceleración centrípeta está dada por: $a_c = \frac{{v_T}^2}{r}$

Suponiendo que el radio ecuatorial de la Tierra sea:

$$r_E \approx 6{,}300\ km = 6.3x10^6 m,$$

Entonces, la velocidad tangencial de un punto en el ecuador es:

$$v_T = \frac{2\pi r_E}{T} \approx \frac{40{,}000km}{24hrs} = \frac{4\text{x}10^7 m}{86{,}400s} \approx 462.96\frac{m}{s}$$

Así entonces podemos escribir para la aceleración centrípeta en la Tierra:

$$a_c = \frac{{v_T}^2}{r_E} \approx \frac{\left(462.96\frac{m}{s}\right)^2}{6.3\text{x}10^6 m} \approx 3.4x10^{-2}\ m/s^2$$

De manera análoga, para la aceleración centrípeta de la Tierra respecto del Sol:

Radio promedio de la órbita terrestre:

$r_o \approx 150$ millones de kilómetros $= 1.5x10^{11}m$,

y esta vez el periodo T es de un año, así que:

$$v_T = \frac{2\pi r_0}{T} \approx \frac{2\pi(1.5\text{x}10^{11}m)}{3.2\text{x}10^7 s} \approx 3x10^4 \frac{m}{s}$$

Por lo que la aceleración centrípeta será:

$$a_c = \frac{{v_T}^2}{r_E} \approx \frac{\left(3\text{x}10^4 \frac{m}{s}\right)^2}{1.5\text{x}10^{11}\text{m}} \approx \frac{9\text{x}10^8 \left(\frac{m}{s}\right)^2}{1.5\text{x}10^{11}\text{m}} \approx 6x10^{-3}\ m/s^2$$

Así pues, la aceleración central debido a la órbita es un orden de magnitud menor a la debida a la rotación, de manera que ya sea que se sumen o se resten (por las posiciones relativas de los movimientos) la situación no cambiará mucho. La aceleración central que experimenta el sistema solar por la rotación galáctica, para una distancia al centro de la galaxia de 26,000 años luz y una velocidad 240,000 m/s será entonces:

$$a_c = \frac{{v_T}^2}{r_G} \approx \frac{\left(2.4\text{x}10^5 \frac{m}{s}\right)^2}{(2.6\text{x}10^4)(3x10^8 m/s)(3.2\text{x}10^7\text{s})}$$

$$\approx \frac{5.76\text{x}10^{10}\left(\frac{m}{s}\right)^2}{2.56\text{x}10^{20}\text{m}} \approx 2.3x10^{-10}\ m/s^2\,,$$

que es 8 órdenes de magnitud menor!

B) Para obtener una aproximación de la masa de la Vía Láctea al interior de la órbita del sistema solar bastará suponer que la fuerza central es muy parecida a la fuerza gravitacional.

Es decir: $\frac{GM_G m}{{r_G}^2} \approx ma_c$.

Despejando M_G se obtiene:

$$M_G \approx \frac{a_c {r_G}^2}{G} \approx \frac{(2.3x10^{-10}\ m/s^2)(2.6\text{x}10^{20}\ m)^2}{6.67\text{x}10^{-11}\ Nm/kg^2}$$

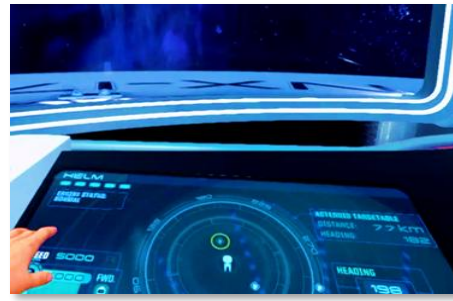
$$\approx 2.3x10^{39}\ kg$$

Se pueden encontrar otros valores dependiendo de las suposiciones que se realicen, pero el orden de magnitud es similar. ■

P-2 Desde un Sistema de Referencia una nave se dirige a la Plataforma de Recarga y se aproxima en línea recta a una velocidad de 3.6x103 km/h.

A) ¿Cuál es la desaceleración constante correcta que se debe establecer cuando la distancia sea de 25 km para lograr el acoplamiento a velocidad cero?

B) ¿En qué tiempo se tendrá el acoplamiento?



Solución:

A) Podemos usar la ecuación: $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$;

Para el acoplamiento se requiere $x = 25\ km$, teniendo: $x_0 = 0$:

$$v_0 = 3.6x10^3 \frac{km}{h} = \frac{3.6\text{x}10^6\ m}{3600\ s} = 1x10^3 m/s$$

$$a \approx 2g = -20\ m/\text{s}^2.$$

B) Entonces, podemos escribir:

$$0 = -25x10^3 m + (1x10^3 m/s)t - \frac{1}{2}(20 m/\text{s}^2)t^2$$

Que tiene la forma: $At^2 + Bt + C = 0$; de manera que:

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC)}}{2A}$$

$$= \frac{-1x10^3 m/s \pm \sqrt{1\text{x}10^6 (m/s)^2 - 4(-10 m/\text{s}^2)(-25\text{x}10^3}}{2(-10 m/\text{s}^2)}$$

$$\therefore \qquad t = \frac{-1x10^3 m/s}{-20 m/s^2} = 50s \qquad \blacksquare$$

P-3 Dos barcos se mueven en direcciones diferentes con velocidades μ y v. Supóngase que en un instante $t = 0$ se encuentran a una distancia $l = AB$.

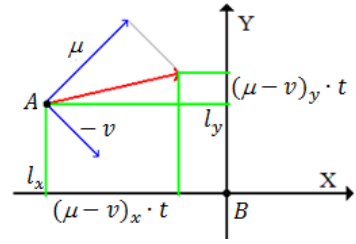
Encontrar la distancia mínima posible a la que se encontrarán ambas embarcaciones. Suponga un sistema de referencia fijo en uno de los barcos.

Solución:

Suponiendo un sistema de referencia fijo en uno de los barcos, entonces el otro se moverá en una trayectoria rectilínea.

La distancia mínima entre ambos barcos estará dada por el segmento de recta perpendicular a la línea de trayectoria que pase por el punto donde se ha fijado el sistema de referencia.

El problema se reduce a encontrar la distancia de un punto a una recta.



$$x = (\mu - v)_x \cdot t + l_x \; ; \; y = (\mu - v)_y \cdot t + l_y$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{x - l_x}{(\mu - v)_x}$$

$$\Rightarrow \quad y = (\mu - v)_y \cdot \left(\frac{x - l_x}{(\mu - v)_x}\right) + l_y$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{(\mu - v)_y}{(\mu - v)_x} x - \frac{(\mu - v)_y}{(\mu - v)_x} l_x + l_y$$

$$\Rightarrow \quad (\mu - v)_y x - (\mu - v)_x y - (\mu - v)_y l_x + (\mu - v)_x l_y = 0$$

que es de la forma: $Ax + By + C = 0$.

La distancia mínima entre los barcos será la distancia perpendicular del punto $B = (x_0, y_0)$ a la recta $Ax + By + C = 0$, es decir:

$$d_{AB} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Sustituyendo las coordenadas del punto $B = (x_0\,, y_0) = (0,0)$, ya que se ha situado el origen del sistema de referencia en ese punto, y las constantes A, B y C en la fórmula, se obtiene:

$$\therefore \qquad d_{AB} = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{(\mu - v)_x l_y - (\mu - v)_y l_x}{\sqrt{(\mu - v)_x^2 + (\mu - v)_y^2}}$$

■

P-4 Demuestre que las transformaciones de Lorentz se reducen a las de Galileo si la velocidad de v es despreciable en comparación con la velocidad de la luz.

Solución:

Sean las transformaciones de Lorentz:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Supongamos que $v \ll c$, entonces:

$$\frac{v^2}{c^2} \to 0 \text{ y } \frac{v}{c^2} \to 0$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - 0}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - 0}{\sqrt{1 - 0}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t}{\sqrt{1}}$$

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

Que son las transformaciones de Galileo. ■

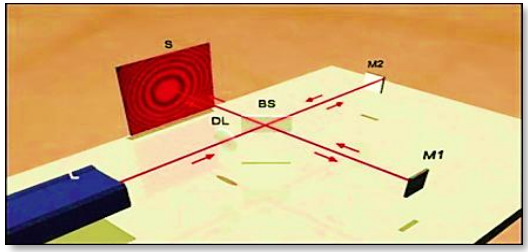
Esta derivación es fundamental porque demuestra el **Principio de Correspondencia**. La nueva teoría (Relatividad Especial) debe ser capaz de explicar todo lo que explicaba la teoría anterior (Mecánica Clásica).

Al hacer que la velocidad sea muy pequeña comparada con la luz ($v \ll c$), los efectos relativistas de dilatación del tiempo y contracción del espacio desaparecen, y recuperamos el sentido común newtoniano donde el tiempo es absoluto ($t' = t$).

P-5 Suponiendo que la luz está compuesta de pequeñas partículas elásticas.

A) Mostrar que el experimento de Michelson y Morley puede ser explicado con base en la relatividad clásica.

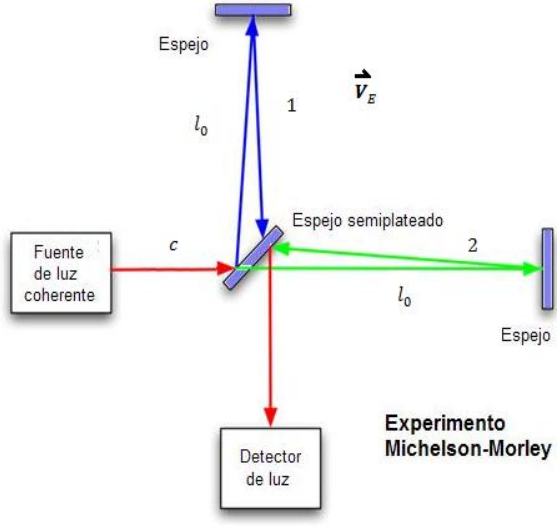
B) Mostrar también que tales partículas, mediante reflexiones repetidas desde espejos móviles, podrían, de acuerdo con la relatividad clásica, viajar a velocidades mucho mayores que c.



Solución:

A) En relatividad clásica las componentes de la velocidad son independientes.

La trayectoria 1 no se afecta por la velocidad del éter (velocidad de traslación de la Tierra), de modo que $t'_2 - t'_1 = 2l_0/c$.



Para la trayectoria 2 el tiempo de ida es: $t_1 = \frac{l_0 + \boldsymbol{V}_E t_1}{c + \boldsymbol{V}_E}$

$\Rightarrow ct_1 + \boldsymbol{V}_E t_1 = l_0 + \boldsymbol{V}_E t_1 \qquad \therefore \qquad t_1 = l_0/c.$

Y el tiempo de vuelta es entonces:

$\Rightarrow ct_2 - \boldsymbol{V}_E t_2 = l_0 - \boldsymbol{V}_E t_2 \qquad \therefore \qquad t_2 = l_0/c.$

$$t_2 = \frac{l_0 - \boldsymbol{V}_E t_2}{c - \boldsymbol{V}_E}$$

El tiempo de recorrido es el mismo en el sistema de referencia del éter. Si bien el espejo se aleja en el recorrido de ida, la velocidad de la luz se incrementa, y en el recorrido de vuelta el espejo se acerca, pero la velocidad de la luz se ve disminuida.

B) Mediante espejos móviles se podría transferir a las "partículas de luz" cierta cantidad de movimiento en cada rebote, después de cierto número de rebotes se sobrepasará la velocidad de la luz. ■

P-6 El observador orbital ExoMars (lanzado en 2016) despliega páneles fotovoltaicos de 60 m de longitud.

Un cometa tipo asteroide alargado de alta velocidad (captado por el Hubble en 2010) pasa en las proximidades a una velocidad $v = 0.80\,c$. El observador registró que, en un instante dado, la parte delantera y trasera del *cometa/asteroide* se alineaban exactamente con los extremos de las placas.

Ese mismo cometa/asteroide fue captado por primera vez por el telescopio Hubble en 2010.

A) ¿Cuál es la longitud propia del cometa?

B) Desde el sistema de referencia del cometa ¿qué longitud tiene ExoMars?

C) Desde el sistema de referencia del cometa, los extremos de este no se alinearán exactamente con los extremos de la plataforma.

Encontrar el intervalo de tiempo que transcurre entre la alineación del extremo delantero del cometa y el extremo trasero con los de los páneles fotovoltaicos. Observador orbital ExoMars.

Solución:

A) Ya que el observador mide una longitud contraída del asteroide, pero la longitud propia de los páneles es $60\ m$, la longitud propia del asteroide será:

$$L_A = \frac{L'_A}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{60\ m}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = 100\ m.$$

B) Desde el sistema de referencia del asteroide la longitud de los páneles estará contraída:

$$L'_P = L_P\sqrt{1 - v^2/c^2} = (60\ m)\sqrt{1 - (0.8)^2} = 36\ m.$$

C) El intervalo de tiempo entre la parte delantera alineándose con un extremo de los páneles y la parte trasera alineándose con el otro, es justamente la distancia "recorrida" por la plataforma:

$$100\ m - 36\ m = 64\ m,$$

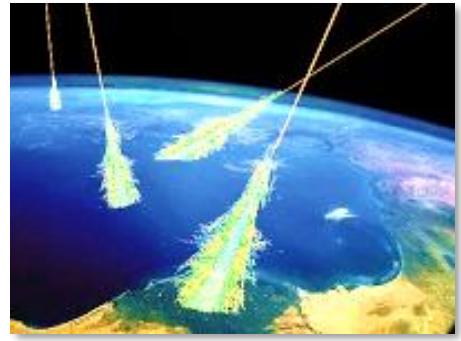
dividida entre la velocidad relativa:

$$\Delta t = \frac{64\ m}{2.4 \times 10^8\ m/s} = 2.7 \times 10^{-7}\ s.$$

Por lo tanto, dos eventos que son simultáneos en un marco de referencia ocurren con 2.7×10^{-7} segundos de diferencia en el otro sistema de referencia, que se mueve con una velocidad relativa respecto del primero. ■

P-7 Los Muones son formados en la estratósfera por el choque de los rayos cósmicos con los átomos de nuestra atmósfera.

La vida media del muon es tan corta que no deberían llegar hasta la superficie, aun moviéndose a una velocidad cercana a la de la luz ($ct \ll h$), donde c es la velocidad de la luz, t la vida media de la partícula, y h la altura a la que se formó).



Sin embargo, se miden muones en la superficie que provienen de los rayos cósmicos. La explicación es que el tiempo de vida de un muón relativista se "estira". Siendo v cercano a c, la vida media que vemos en ellos es mucho mayor que la que se mide para un muón de baja energía.

Para el caso de un muón ($\mu-$) que es una partícula elemental que se puede producir al llegar un rayo cósmico a los estratos más altos de la atmósfera terrestre, se tiene una vida media de unos 2×10^{-6} segundos, y se ha detectado a velocidades de $.997\ c$.

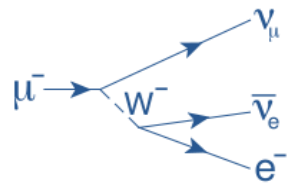


Diagrama de Feynman: desintegración en un electrón, un antineutrino electrónico y un neutrino muónico.

Encuentre la distancia que puede recorrer en su trayectoria hacia la superficie terrestre.

Solución:

La vida del Muón es de unos $2 \times 10^{-6} s$ y su velocidad es de $0.997c$

Sabemos que $t' = t\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ donde t es el sistema de referencia de la Tierra.

Entonces tenemos que:

$$\frac{t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = t$$

Sustituyendo los datos, tenemos que $t = 25.8\mu s$, el cual, es la vida media en la Tierra.

Por otro lado, se sabe que $x = vt$ por lo que:

$$x = (0.997c)(25.8\mu s) \approx 7728.5m,$$

la cual es la distancia que puede recorrer en su trayectoria hacia la superficie terrestre. ■

Este es un problema clásico de **Dilatación Temporal** que explica por qué los muones (partículas inestables) logran llegar a la superficie de la Tierra a pesar de su corta vida media.

Este ejercicio demuestra que:

1. **Para el muón (tiempo propio t'):** Solo vive 2 microsegundos.
2. **Para nosotros en la Tierra (tiempo dilatado t):** Vemos que vive casi 26 microsegundos porque viaja muy rápido (cerca de la velocidad de la luz).
3. **Resultado:** Gracias a esa dilatación del tiempo, el muón puede recorrer más de 7 km y llegar al suelo; sin la relatividad, apenas recorrería unos 600 metros antes de desintegrarse.

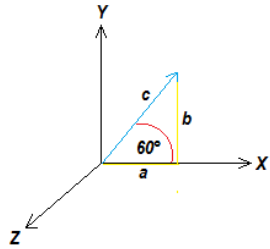
P-8 Considere un rayo de luz en el plano XZ en un marco de referencia S, formando un ángulo $\theta = 60°$ con el eje X.

¿Cuál será el nuevo ángulo cuando S se mueva en la dirección X con velocidad $c/2$?

Solución:

Recordamos que, si bien la magnitud de la velocidad c se mantiene constante, sus componentes no tienen por qué serlo.

Tomando el triángulo a, b, c que se muestra en la figura:



Se tiene que:

$$a = ct\,cos\,60° = ct/2 \quad \text{y} \quad b = ct\,sen\,60° = ct\sqrt{3}/2.$$

Así que,

$$a' = \frac{ct}{2}\sqrt{1 - v^2/c^2}\, y b' = ct\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta' = tan^{-1}\frac{\sqrt{3}/2}{\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 63°.43$$

■

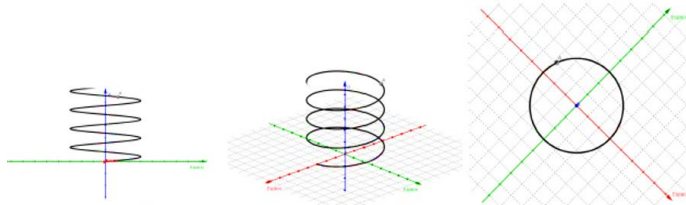
P-9 Dibuje la línea de universo de una partícula que se mueve en el plano XY de la siguiente manera:

A) Describiendo un círculo a velocidad constante.

B) Acelerándose desde el reposo hasta alcanzar una cierta velocidad, la cual ya se mantiene constante.

Solución:

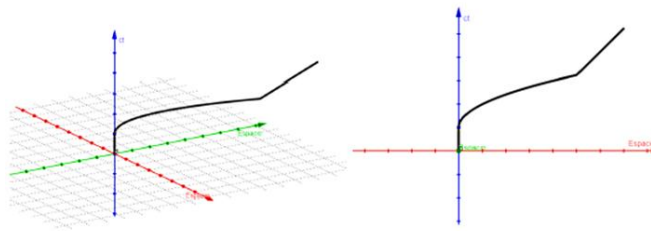
A) Puesto que la partícula se mueve a velocidad constante en una trayectoria circular, elegiremos el sistema de referencia n el centro de dicha trayectoria.



(a) Diagrama (x^1, ct) (b) Diagrama (x^1, x^2, ct) (c) Diagrama (x^1, x^2)

Líneas de universo para una partícula moviéndose en una trayectoria circular a velocidad constante.

B) tenemos una partícula que se mueve desde el reposo, que en los diagramas representamos como una línea vertical pues no se mueve en el espacio, pero si en el tiempo, después en un movimiento acelerado, donde a intervalos iguales de tiempo recorre mucha distancia, por ello la curva y finalmente un movimiento a velocidad constante, que a tiempos iguales avanza distancias iguales, que se representa en una línea recta. (Las direcciones tomadas para cada movimiento fueron arbitrarias.)

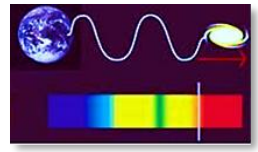


(a) Diagrama (x^1, x^2, ct) (b) Diagrama (x^1, ct)

Líneas de universo para una partícula moviéndose desde el reposo, a un movimiento acelerado y luego a una velocidad constante. ■

P-10 **A)** Cuando dos electrones salen de una muestra radioactiva en direcciones opuestas cada uno a velocidad de $0.67\,c$ con respecto de la muestra, la velocidad de un electrón respecto al otro es $1.34\,c$, de acuerdo con la física clásica. ¿Cuál es el resultado relativista?

B) Una galaxia distante se aleja de la Tierra a tan alta velocidad que la línea azul de hidrógeno a $431\ nm$ se registra a $600\ nm$, en el intervalo correspondiente al rojo en el espectro.



¿Cuál es la velocidad de la galaxia respecto a la Tierra?

Solución:

A) Considerando a un electrón en el sistema S, la muestra como el sistema S' y el otro electrón como el objeto cuya velocidad buscamos en el sistema S. Entonces:

$$u' = 0.67c \qquad v = 0.67c$$

y

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{(0.67 + 0.67)c}{1 + (0.67)^2} = \frac{1.34}{1.45}c = 0.92c$$

■

B)

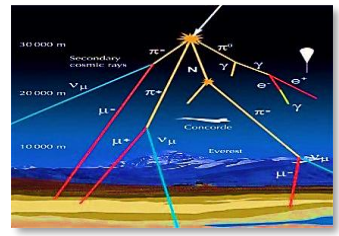
$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}};$$

y como:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} y \nu' = \frac{c}{\lambda'}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}} \quad \therefore \quad \frac{u}{c} = 0.31 \qquad ■$$

P-11 La vida media de un muón en reposo es de $2.2 \times 10^{-6} s$. La vida media de los muones observada al penetrar la atmósfera terrestre es de $6.6 \times 10^{-6} s$.



Tomando $m_e = 0.510\ MeV/c^2$. Encuentre:

A) La masa del muón a esta velocidad siendo su masa en reposo de $207\ m_e$.

B) Su energía cinética (en MeV).

C) Su momento (en MeV).

Solución:

A) $t = t_0\gamma$; donde, $\gamma = (6.6 \times 10^{-6} s)/(2.2 \times 10^{-6} s) = 3$.

De modo que: $m = m_0\gamma = 3 \times 207\ m_e = 621\ m_e$.

B) $T = (\gamma - 1)m_0c^2 = (3 - 1) \times (207\ ) \times (0.510\ MeV/c^2) \times c^2 = 211.14\ MeV$.

C) La energía total es:

$E = mc^2 = (621\ m_e)c^2 = 621 \times 0.510\ MeV = 316.71\ MeV$;

pero $E^2 = (m_0c^2)^2 + p^2c^2$

$\Rightarrow \quad p^2c^2 = E^2 - (m_0c^2)^2 = [316.71\ MeV]^2 - [(207\ ) \times (0.510\ MeV)]^2$

de modo que:

$$p^2c^2 = 100{,}305.224 \times [\ MeV]^2 - 11{,}145.029 \times [MeV]^2$$
$$= 89{,}160.195 \times [MeV]^2.$$

Así que:

$$p = \frac{\sqrt{89{,}160.195 \times [MeV]^2}}{c} = 298.597 \frac{MeV}{c}$$ ■

P-12 A una distancia igual al radio de la órbita de la Tierra, $r_T = 1.5 \times 10^{11}\, m$, la radiación del Sol tiene una intensidad aproximadamente de $I_S = 1.4 \times 10^3\, W/m^2$.

Encontrar la razón a la que el Sol está perdiendo masa.

Solución:

Suponiendo que la radiación del Sol está distribuida uniformemente sobre una esfera de radio $r_T = 1.5 \times 10^{11}\, m$, entonces la potencia radiativa total emitida por el Sol es:

$$P_S = 4\pi(1.5 \times 10^{11}\, m)^2(1.4 \times 10^3\, W/m^2)$$
$$= 4 \times 10^{26}\, W = 4 \times 10^{26}\, J/s.$$

Una pérdida de energía en reposo de $\Delta E_0 = 4 \times 10^{26}\, J$ corresponde a un cambio de masa en reposo de:

$$\Delta m_0 = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{4 \times 10^{26}\, J}{(3 \times 10^8\, m/s)^2} = 4 \times 10^9\, kg.$$

■

2. Cálculo Tensorial.-

P-13 Desarrollar la expresión $a_i b_i$ para $n = 6$.

Si $\varepsilon_i = 1$ para toda i, probar que:

A) $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \equiv \varepsilon^i \varepsilon^j a_i a_j$.

B) $a_i(1 + x_i) \equiv a_i \varepsilon^i + a_i x^i$.

C) $a_{ij}(x_i + x_j) \equiv 2a_{ij}\varepsilon^j x^i$, $con\ a_{ij} = a_{ji}$

Solución:

Para $i = 1, 2, \ldots, 6$ se tiene:

$$a^i b_i = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 + a^4 b_4 + a^5 b_5 + a^6 b_6$$

A) Partiendo del lado derecho de la ecuación se tiene que:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = (\varepsilon^i a_i)^2 = (\varepsilon^i a_i)(\varepsilon^i a_i)$$

Como el convenio suma de Einstein no permite que un índice mudo aparezca más de dos veces, se renombra a uno de los índices mudos como j, y entonces se tiene:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = (\varepsilon^i a_i)(\varepsilon^j a_j) = \varepsilon^i \varepsilon^j a_i a_j,$$

cómo se pedía.

B) Expandiendo el producto y suponiendo que el índice i está sumado en el producto, se tiene:

$$a_i(1 + x^i) = a_i + a_i x^i = a_i \varepsilon^i + a_i x^i.$$

C) Usando la definición de ε^k el lado izquierdo de la igualdad se convierte en:

$$a_{ij}(x^i + x^j) = a_{ij}(\varepsilon^j x^i + \varepsilon^i x^j) = a_{ij}\varepsilon^j x^i + a_{ij}\varepsilon^i x^j,$$

Como $a_{ij} = a_{ji}$ entonces, al intercambiar el lugar de los índices i, j del segundo sumando, la última expresión se convierte en:

$$a_{ij}\varepsilon^j x^i + a_{ij}\varepsilon^i x^j = a_{ij}\varepsilon^j x^i + a_{ij}\varepsilon^j x^i = 2a_{ij}\varepsilon^j x^i \qquad \blacksquare$$

Este Ejercicio ilustra una regla de oro en el cálculo tensorial: nunca repetir un índice de sumatoria más de dos veces en un mismo término. Por eso en el inciso (A) es obligatorio cambiar la segunda i por una j para multiplicar las sumas.

P-14 **A)** Probar mediante la regla del producto y la convención de suma, la ley asociativa para matrices:

$$(AB)C = A(BC)$$

Donde $A \equiv (a_{ij})$, $B \equiv (b_{ij})$, $C \equiv (c_{ij})$ son matrices arbitrarias, pero compatibles para multiplicarse entre sí.

B) Calcular el ángulo entre los vectores de $\mathbb{R}^{\mathbf{6}}$:

$x = (3, -1, 0, 1, 2, -3)$ e $y = (-2, 1, 0, 1, 0, 0)$.

C) Calcular la inversa de:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ y b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Solución:

A) Sean $A = [a_{ij}]_{n\times m}$, $B = [b_{ij}]_{m\times k}$ y $C = [c_{ij}]_{k\times p}$, Entonces el producto $(AB)C$ en términos de sus componentes es igual a:

$$\left(a_r^i b_j^r\right)c_i^j.$$

Como esto ya es un escalar, entonces cumple con la asociatividad de los escalares y, por tanto:

$\left(a_r^i b_j^r\right)c_i^j = a_r^i\left(b_j^r c_i^j\right)$; es decir $(AB)C = A(BC)$.

B) El ángulo entre dos vectores en R^n se calcula por medio de la fórmula:

$$\cos\theta = \frac{x^i y_i}{\sqrt{x^k x_k}\sqrt{y^l y_l}}$$

Usando los vectores dados se tiene que:

$$\cos\theta = \frac{-6}{\sqrt{24\sqrt{6}}} = \frac{-1}{2}$$

Y por tanto $\theta = 120°$.

C)

Inciso a)

Las matrices de 2×2 pueden ser invertidas al intercambiar la entrada $(1,1)$ con $(2,2)$ y posteriormente invertir el signo de las entradas restantes, finalmente se divide por el determinante de la matriz, en el caso dado se tiene que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(3 \cdot 2) - (5 \cdot 1)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Inciso b)

Para invertir una matriz en general se debe calcular la matriz adjunta de la transpuesta y dividirla por el determinante de la matriz original, en el caso de la matriz dada se tiene

$$det(A) = 2 - (-4 - 1) = 2 + 5 = 7, A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$adj(A^t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la matriz pedida es:

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

■

P-15 Supóngase que la siguiente transformación conecta los sistemas de coordenadas (x^i) y $(\hat{x}^i)$:

$$\boldsymbol{\mathcal{T}}: \begin{cases} \hat{x}^1 = exp(x^1 + x^2) \\ \hat{x}^2 = exp(x^1 - x^2) \end{cases}$$

A) Calcule la matriz jacobiana $\boldsymbol{J}$ y el jacobiano J. Muestre que $J \neq 0$ sobre todo $\mathbb{R}^2$.

B) De las ecuaciones para $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{-1}$.

C) Calcule la matriz jacobiana $\hat{\boldsymbol{J}}$ de $\boldsymbol{\mathcal{T}}^{-1}$ y compárela con $\boldsymbol{J}^{-1}$.

Solución:

A) Las derivadas parciales de la transformación dada son:

$$\frac{\partial \widehat{x^1}}{\partial x^1} = \widehat{x^1}, \quad \frac{\partial \widehat{x^1}}{\partial x^2} = \widehat{x^1}, \quad \frac{\partial \widehat{x^2}}{\partial x^1} = \widehat{x^2}, \quad \frac{\partial \widehat{x^2}}{\partial x^2} = -\widehat{x^2}$$

Por lo que el jacobiano de la transformación será:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{T}) = \begin{pmatrix} \widehat{x^1} & \widehat{x^2} \\ \widehat{x^1} & -\widehat{x^2} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es:

$$j = |\boldsymbol{J}| = -\widehat{x^1}\widehat{x^2} - \widehat{x^1}\widehat{x^2} = -2\widehat{x^1}\widehat{x^2} = -2e^{2x^1} \neq 0,$$

lo anterior debido a que la función exponencial nunca es nula.

B) Aplicando la función logaritmo a ambas ecuaciones de la transformación se tiene:

$$\log \widehat{x^1} = x^1 + x^2, \quad \log \widehat{x^2} = x^1 - x^2.$$

Si ambas son sumadas se tendrá:

$$\log \widehat{x^1} + \log \widehat{x^2} = \log\left(\widehat{x^1}\widehat{x^2}\right) = 2x^1,$$

mientras que, si se resta la segunda de la primera, se obtiene:

$$2x^2 = \log \widehat{x^1} - \log \widehat{x^2} = \log\left(\widehat{x^1}/\widehat{x^2}\right).$$

Por tanto, las transformaciones inversas son:

$$x^1 = \log\sqrt{\widehat{x^1}\widehat{x^2}}, \; x^2 = \log\sqrt{\widehat{x^1}/\widehat{x^2}}\,.$$

C) Las derivadas parciales de la transformación inversa son:

$$\frac{\partial x^1}{\partial \widehat{x^1}} = \frac{1}{2\widehat{x^1}}, \quad \frac{\partial x^1}{\partial \widehat{x^2}} = \frac{1}{2\widehat{x^2}}, \quad \frac{\partial x^2}{\partial \widehat{x^1}} = \frac{1}{2\widehat{x^1}}, \quad \frac{\partial x^2}{\partial \widehat{x^2}} = -\frac{1}{2\widehat{x^2}},$$

Entonces el jacobiano de la transformación inversa es:

$$J(T^{-1}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\widehat{x^1}} & \frac{1}{\widehat{x^2}} \\ \frac{1}{\widehat{x^1}} & -\frac{1}{\widehat{x^2}} \end{pmatrix},$$

Por otro lado, al invertir la matriz jacobiana obtenida en el primer inciso, se obtiene:

$$\boldsymbol{J}(T)^{-1} = \frac{1}{j}\begin{pmatrix} -\widehat{x^2} & -\widehat{x^2} \\ -\widehat{x^1} & \widehat{x^1} \end{pmatrix} = \frac{1}{-2\widehat{x^1}\widehat{x^2}}\begin{pmatrix} -\widehat{x^2} & -\widehat{x^2} \\ -\widehat{x^1} & \widehat{x^1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\widehat{x^1}} & \frac{1}{\widehat{x^2}} \\ \frac{1}{\widehat{x^1}} & -\frac{1}{\widehat{x^2}} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $\boldsymbol{J}(T^{-1}) = \boldsymbol{J}(T)^{-1}$. ■

P-16 **A)** Pruebe que la delta de Kronecker $\left(\delta_j^i\right)$, definida uniformemente en todos los sistemas de coordenadas, es un tensor mixto de orden 2.

B) Muestre que si $\left(T_j^i\right)$ es un tensor mixto, entonces $\left(T_j^i + T_i^j\right)$ en general no es un tensor.

C) Muestre que un tensor mixto de orden 2, simétrico en un sistema de coordenadas dado, transformará como un tensor simétrico si la matriz jacobiana es ortogonal.

Solución:

A) Cualquier tensor mixto de rango $(1, 1)$ se transforma de acuerdo con la relación:

$$\overline{T_k^l} = \frac{\partial y^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial y^k}T_t^r$$

Tomando $T_t^r = \delta_t^r$ la ley de transformación se reduce a:

$$\overline{\delta_k^l} = \frac{\partial y^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial y^k}\delta_t^r$$

Usando la definición de la delta de Kronecker y regla de la cadena se tiene:

$$= \frac{\partial y^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial y^k} = \frac{\partial y^i}{\partial y^k} = \delta_k^i$$

Por tanto, la delta es un tensor mixto.

B) Ya que cualquier tensor mixto de rango $(1, 1)$ se transforma de acuerdo con la relación:

$$\overline{T_J^l} = \frac{\partial y^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial y^j}T_t^r$$

entonces el tensor "transpuesto" se transforma de acuerdo con:

$$\overline{T_l^J} = \frac{\partial y^j}{\partial x^t}\frac{\partial x^r}{\partial y^i}T_r^t$$

Entonces $\left(\overline{T_J^l} + \overline{T_l^J}\right)$ se transforma como:

$$\left(\overline{T_J^l} + \overline{T_l^J}\right) = \frac{\partial y^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^t}{\partial y^j}T_t^r + \frac{\partial y^j}{\partial x^t}\frac{\partial x^r}{\partial y^i}T_r^t$$

y, por otro lado, por la definición de transformación de tensor:

$$\left(\overline{T_J^I} + \overline{T_\iota^J}\right) = (T_s^r + T_r^s)\frac{\partial y^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial y^j}$$

La única manera en que ambas ecuaciones tengan sentido es que el jacobiano de la transformación sea ortogonal, lo que no siempre se cumple.

C) Como el tensor es simétrico en el sistema de coordenadas original, entonces cumple con que $T = T^t$, mientras que la ley de transformación del tensor es $\bar{T} = JTJ^{-1}$, entonces si se pide que $\bar{T}$ sea simétrico se debe cumplir que:

$$\bar{T} - \overline{T^t} = JTJ^{-1} - (J^{-1})^t T^t J^t = JTJ^{-1} - (J^{-1})^t T J^t = 0$$

La última igualdad implica que:

$$JTJ^{-1} = (J^{-1})^t T J^t,$$

multiplicando a la derecha con J y a la izquierda con J^{-1} se concluye que:

$$J^t J = I, \qquad J^{-1}(J^{-1})^t = I. \qquad \blacksquare$$

P-17 Usando el tensor métrico Euclidiano para coordenadas polares, calcule la longitud de arco para la curva:

$$\mathcal{C}: x^1 = 2a\cos t, \quad x^2 = t; \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

De la interpretación geométrica.

Solución:

En coordenadas polares el elemento de línea viene dado como:

$$dS^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$$

y como $L = \int \sqrt{(dS/dt)^2}\, dt$, entonces:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2a\sin t)^2 + (2a\cos t)^2}\, dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} 2a\, dt = 4a\pi,$$

Resultado que puede interpretarse como una vuelta a una circunferencia de radio $2a$ o bien dos vueltas a una circunferencia de radio a.

■

P-18 **A)** Si T^i_{jrs} son componentes de un tensor, escriba las componentes de la derivada covariante, $T^i_{jrs;k}$.

B) Pruebe que todas las Γ^i_{jk} se anulan solo si las g_{ij} son constantes.

Solución:

A) Ya que el tensor dado es de orden (1,3), debe haber 3 correcciones covariantes y 1 contravariante, es decir 3 términos son negativos y uno positivo, entonces:

$$T^i_{klm,q} = \frac{\partial T^i_{klm}}{\partial x^q} - \Gamma^s_{kq}T^i_{slm} - \Gamma^s_{lq}T^i_{ksm} - \Gamma^s_{mq}T^i_{kls} + \Gamma^s_{qs}T^s_{klm}$$

B) Por definición de los símbolos de Christoffel de segundo tipo:

$$\Gamma^i_{jk} = g^{ri}\Gamma_{jkr},$$

donde los símbolos del primer tipo son definidos como:

$$\Gamma_{jkr} = \frac{1}{2}\left(g_{kr,j} + g_{rj,k} - g_{jk,r}\right),$$

Ya que cada $g_{\mu\nu}$ es constante para todo par de índices (μ, ν) entonces las derivadas se anularán y por tanto los símbolos de Christoffel de primer tipo serán nulos y en consecuencia los de segundo también lo serán.

- Si $g_{\mu\nu}$ es **constante**, sus derivadas son cero y los símbolos de Christoffel se anulan (espacio plano), lo cual es correcto.
- Si $g_{\mu\nu}$ fuera **nula** (cero en todas partes), la matriz no tendría inversa (g^{ri} no existiría) y los símbolos de segundo tipo estarían indefinidos, no necesariamente serían nulos.

■

P-19 Usando el tensor métrico:

$$G = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & (x^1)^2 \end{bmatrix}$$

Calcule la longitud de la curva dada por:

$$x^1 = 3 - t, \quad x^2 = 6t + 3, \quad x^3 = \ln t\,; \quad 1 \le t \le e$$

Solución:

Se tiene que: $L = \int_a^b \sqrt{\left| g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right|}\, dt$

Donde:

$$g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & (x^1)^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ \frac{1}{t} \end{bmatrix}$$

$$\frac{9}{t^2} + \frac{6}{t} + 1 = \left(\frac{3}{t} + 1 \right)^2,$$

por tanto:

$$L = \int_1^e \left(\tfrac{3}{t} + 1 \right) dt = e + 2. \qquad \blacksquare$$

P-20 Calcule los símbolos de Christoffel diferentes de cero del primer y segundo tipo en coordenadas cilíndricas.

Solución:

Los símbolos de Christoffel del primer tipo, por definición son:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}\right).$$

Donde el tensor métrico está dado como:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como 8 de los 9 elementos del tensor son constantes, sólo habrá una derivada parcial no nula de este, a saber:

$$\frac{\partial}{\partial x^1} g_{22} = 2x^1;$$

En consecuencia, los únicos símbolos de Christoffel de primer tipo no nulos son:

$$\Gamma_{122} = \Gamma_{212} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^1} g_{22} = x^1$$

$$\Gamma_{221} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^1} g_{22} = -x^1.$$

Los símbolos del segundo tipo corresponden a una subida del índice 'i', es decir $\Gamma^i_{jk} = g^{ir}\Gamma_{jkr}$, por tanto, los símbolos de Christoffel de segundo tipo serán:

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = g^{22}\Gamma_{122} = \frac{1}{g_{22}}\Gamma_{122} = \frac{x^1}{(x^1)^2} = \frac{1}{x^1}$$

$$\Gamma^1_{22} = g^{11}\Gamma_{221} = \frac{1}{g_{11}}\Gamma_{221} = -x^1$$

■

3. Relatividad General.-

P-21 Liste y discuta algunas de las consecuencias del Principio de Equivalencia de Einstein.

Solución:

1. Un observador en caída libre en un campo gravitatorio constante es localmente equivalente a un observador inercial en ausencia de gravedad. Del mismo modo, si el observador tiene un movimiento uniformemente acelerado es localmente equivalente a un observador inercial en un campo gravitatorio constante.
2. El Principio de Equivalencia sólo es válido localmente; es decir, a escalas pequeñas, donde el cambio de coordenadas esté en un espacio-tiempo de Minkowsky. A escalas más grandes se puede ver la diferencia entre gravedad y aceleración debido a la inhomogenidad de los campos gravitatorios.
3. La gravedad no es una fuerza física, sino una fuerza aparente o pseudo-fuerza debida a la elección del sistema de referencia.
4. La atracción gravitacional observada entre masas se debe a una curvatura del espacio-tiempo y a la geometría de este y no a fuerzas a distancia.

■

P-22 Pruebe que la divergencia del tensor de Einstein vale cero; es decir:

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = \nabla^{\mu}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right] = 0$$

Solución:

Sea la expresión para la identidad de Bianchi:

$$\nabla_k R^i_{rsu} + \nabla_s R^i_{kru} + \nabla_r R^i_{sku} = 0$$

Al aplicar la propiedad $R^i_{rsu} = -R^i_{sru}$ a la identidad de Bianchi se obtiene una expresión cuyos índices se han intercambiado.

Adicionalmente, si se hace $i = r$ sobre la expresión resultante es posible contraer el índice i. Matemáticamente:

$$\nabla_k R^i_{rsu} - \nabla_s R^i_{rku} - \nabla_r R^i_{ksu} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_k R^i_{isu} - \nabla_s R^i_{iku} - \nabla_i R^i_{ksu} = 0 \Rightarrow \nabla_k R_{su} - \nabla_s R_{ku} - \nabla_i R^i_{ksu} = 0$$

Multiplicando lo anterior por g^{su} se tiene que por la propiedad $\nabla_k g^{ij} = 0$; así, cambiando s por i en el segundo término:

$$-\nabla_k R^s_s + \nabla_s R^s_k + \nabla_i R^i_k = 0 \Rightarrow -\nabla_k R^s_s + 2\nabla_i R^i_k = 0$$

Si ahora, se aplica la métrica g^i_k, entonces es posible tender un puente entre ∇_i y ∇_k mediante la siguiente expresión:

$$-\nabla_i g^i_k R^s_s + 2\nabla_i R^i_k = 0$$

Usando que $R = R^i_i$:

$$\Rightarrow \nabla_i \left(R^i_k - \frac{1}{2} g^i_k R\right) = 0$$

Obteniendo así el Tensor de Einstein mixto, mismo que se puede reescribir dadas sus propiedades simétricas, demostrando así la anulación de la divergencia del Tensor:

$$\therefore \nabla_i \left(R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R\right) = 0 \qquad \blacksquare$$

P-23 Deduzca el valor de la constante K en la ecuación:

$$G_{\mu\nu} = KT_{\mu\nu}$$

Solución:

En principio identificamos a $\boldsymbol{G_{\mu\nu}}$ como el tensor de campo gravitacional (La geometría) y a $\boldsymbol{T_{\mu\nu}}$ el tensor que representa todas las energías y momentos, a excepción del origen gravitacional.

Esta expresión es una generalización para campos no débiles y altas velocidades que podemos escribir de otra manera, es decir;

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho \quad \leftrightarrow \quad \nabla^2 g_{\mu\nu} = KT_{\mu\nu}$$

Donde la primera expresión es la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional, además tenemos por otro lado que

$$T_{\mu\nu} = \rho c^2\,; \quad g_{\mu\nu} = \left(-1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right)$$

Entonces

$$\nabla^2 g_{\mu\nu} = \nabla^2\left(-1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right) = -\frac{2}{c^2}(4\pi G\rho) = 8\pi G\frac{T_{\mu\nu}}{c^4}$$

Por lo tanto

$$\nabla^2 g_{\mu\nu} = 8\pi G\frac{T_{\mu\nu}}{c^4} \quad \leftrightarrow \quad k = \frac{8\pi G}{c^4}$$

■

P-24 Demostrar que la métrica de Schwarzschild se reduce como un caso especial a la métrica Lorentziana correspondiente a un espacio-tiempo plano a grandes distancias del cuerpo que está generando un campo esféricamente simétrico y estático, suponga $r \to \infty$.

Solución:

En la métrica de Schwarzschild, tomando $r \to \infty$ dos términos se desvanecen:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\varphi^2)$$

Entonces, se tiene:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2sen^2\theta\, d\varphi^2$$

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sen^2\theta\, d\varphi^2)$$

Para la conversión de coordenadas esféricas a coordenadas Cartesianas rectangulares tenemos lo siguiente:

$$x = r\, sen\theta\, cos\varphi, \qquad y = r\, sen\theta\, sen\varphi, \qquad z = r\, cos\theta$$

De modo que,

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2sen^2\theta(d\varphi)^2$$

Con esto tenemos entonces lo siguiente:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Que es precisamente la métrica de Lorentz para un espacio-tiempo plano, propia de la Teoría Especial de la Relatividad. ■

¡Lo importante es no dejar de hacerse preguntas!